E_{10} in M theory ： the update

KEK
溝口 俊弥

超弦/M理論 = 究極理論？

E_8 ——例外 (有限) リー代数

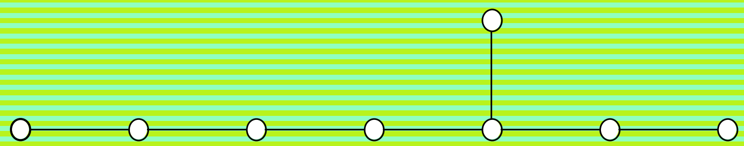
- ヘテロティックストリングのゲージ群
- D=3 U-デュアリティー

- その他ADE分類に付随したもの (モジュラー不変分配関数 、特異点(ALE空間、楕円多様体、...)、...)

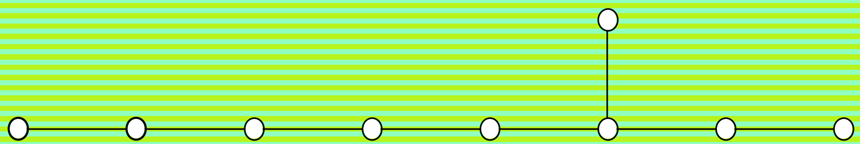
- デルペッツォ曲面のアイソメトリー
- パンルベ方程式のベックルント変換群

See : S.M/Yamada 0202152
Phys.Lett.B537(2002)130

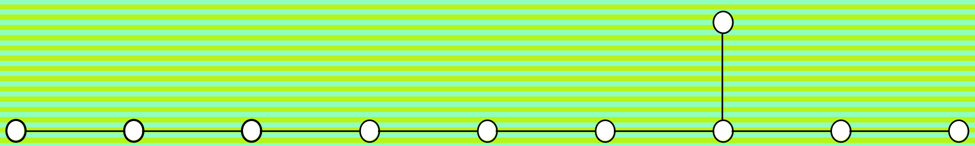
E_{10}とは？



E_8 最大の例外型
リー代数



E_9 アファイン
リー代数

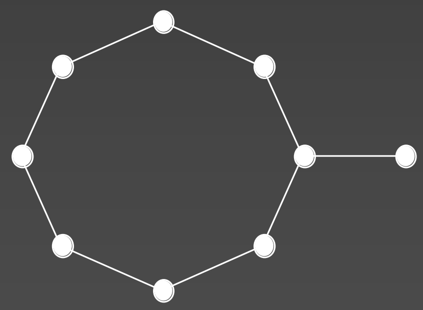


E_{10} 最大の
ハイパボリック
リー代数

Hyperbolic Kac-Moody Algebras

- Dynkin 図形のどこを切っても finite または affine 型のDynkin 図形の和しか残らない(regular subalgebrasに対する条件)
- Rank $\geq$ 3 のものは有限 (136) 個しかない
- Cartan 行列が indefinite で符号は Lorentzian
- Rank =10 が最大で、E_{10}はその1つ (他に3つある)

スーパーストリングと関係？ Julia, Nicolai,…



「おたまじゃくし」型
でこれより大きなものは
ハイパボリックでない

ディメンショナル リダクションと U-デュアリティー

U-duality研究の歴史

D=11 supergravity
Cremmer/Julia/Scherk
(1978)

D=4, $E_{7(+7)}$/SU(8) hidden symemtry
Cremmer/Julia(1979)

D=1, E_{10} conjecture
Julia(1982)

D=3, $E_{8(+8)}$/SO(16) supergravity
Marcus/Schwarz(1983)

D=2, E_9 symmetry
Nicolai(1987)

T-duality Kikkawa/Yamasaki(1984)
Sakai/Senda(1986)

S-duality
Font et.al.(1990),Rey(1991)

O(d,d)symmetry
Narain(1986)
Maharana/Schrawz(1993)

U-duality
Hull/Townsend(1994)

ディメンショナル リダクションと対称性

D=4 Einstein重力

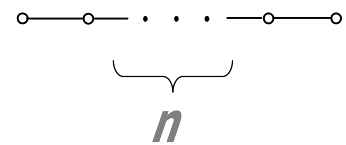
↓ リダクション

D=3 A_1対称性

D=n+3 Einstein重力

↓ リダクション

D=3 A_n対称性



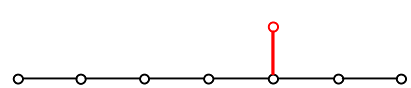
いくらでも伸びる

D=11 超重力

=重力＋3階反対称テンソル

↓ リダクション

D=3 E_8 対称性



3次元へのディメンショナルリダクション

D =11 supergravity, bosonic Lagrangian

$$\mathsf{L} = E^{(11)}\left(R^{(11)} - \frac{1}{48} F_{MNPQ} F^{MNPQ} - \frac{1}{6\cdot 4!^2\, 3!} E^{(11)-1} \varepsilon^{M_1 \ldots M_{11}} F_{M_1 \ldots M_4} F_{M_5 \ldots M_8} A_{M_9 M_{10} M_{11}} \right)$$

$E^{(11)}R^{(11)}$項 $E_M^{(11)A} = \begin{bmatrix} e^{-1} E_\mu{}^\alpha & B_\mu^i e_i{}^a \\ 0 & e_i{}^a \end{bmatrix}$ (μ は3次元時空の、i は T^8 の添字) とすると、

$$\Longrightarrow E^{(11)}R^{(11)} = E\left(R - \partial_\mu \log e \partial^\mu \log e + \frac{1}{4}\partial_\mu g_{ij} \partial^\mu g^{ij} - \frac{1}{4} e^2 g_{ij} B^i_{\mu\nu} B^{\mu\nu j} \right)$$

Lagrange multiplier 項 $\mathsf{L}_{\text{Lag.mult.}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\psi_i \partial_\mu B^i_{\nu\rho}$ を加えて $B^i{}_{\mu\nu}$ をdual 化

$$\Longrightarrow E^{(11)}R^{(11)} + \mathsf{L}_{\text{Lag.mult.}} = E\left(R - \partial_\mu \log e \partial^\mu \log e + \frac{1}{4}\partial_\mu g_{ij} \partial^\mu g^{ij} - \frac{1}{2} e^2 g^{ij} \partial_\mu \psi_i \partial_\nu \psi_j \right)$$

$$= E\left(R + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\, \partial_\mu M_+ \partial^\mu M_+^{-1} \right)$$

$$M_+ = V_+ V_+{}^T, \quad V_+ = \begin{bmatrix} e_i{}^a & -e^{-1}\psi_i \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$$

SL(9,R)/SO(9) nonlinear sigma model

E_8のSL(9)分解

$$248 = 80 \oplus 84 \oplus \overline{84}$$

E_8 adjoint	SL(9) adjoint	3階反対称	3階反対称

$$[X,\ Y]_i{}^j = (XY - YX)_i{}^j$$

$$[X,\ v]_{ijk} = X_i{}^l v_{ljk} + X_j{}^l v_{lki} + X_k{}^l v_{lij}$$

$$[X,\ v^*]^{ijk} = -(X_l{}^i v^{*ljk} + X_l{}^j v^{*lki} + X_l{}^k v^{*lij})$$

$$[v,\ w]^{ijk} = \frac{1}{3!}\varepsilon^{ijkpqrlmn} v_{pqr} w_{lmn}$$

$$[v^*,\ w^*]_{ijk} = -\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijkpqrlmn} v^{*pqr} w^{*lmn}$$

$$[v,\ w^*]_i{}^j = -\frac{1}{2}\left(v_{ikl} w^{*jkl} - \frac{1}{9}\delta_i^j v_{klm} w^{*klm}\right)$$

$$X_i{}^j \in 80,\quad v_{ijk} \in 84,\quad v^{*ijk} \in \overline{84}$$

Full (bosonic) D=3 Lagrangian

$$\mathrm{L} = E^{(11)}\left(R^{(11)} - \frac{1}{48} F_{MNPQ} F^{MNPQ} - \frac{1}{6\cdot 4!^2\, 3!} E^{(11)-1} \varepsilon^{M_1\ldots M_{11}} F_{M_1\ldots M_4} F_{M_5\ldots M_8} A_{M_9 M_{10} M_{11}} \right)$$

A_{MNP}に由来するスカラー場

A_{ijk} 56個

$A_{\mu ij}$ 28個 $\rightarrow$ dual化 φ^{ij}

$$V_- \equiv \exp\left(\frac{1}{3} A_{ijk} E^{ijk} + \frac{1}{2} \varphi^{ij} E^*_{ij9} \right) \qquad (i,j,k = 1,\ldots 8, \quad \neq 9)$$

(E, E^* はそれぞれ84, 84の基底) とすると

$$V = V_- V_+ , \qquad M = V\,\tau(V^{-1})$$

τ : symmetric space involution

$\mathbf{E}_8 = \mathbf{H}(= \mathbf{SO(16)}) \oplus \mathbf{K}, \quad \tau(\mathbf{H}) = +\mathbf{H}, \quad \tau(\mathbf{K}) = -\mathbf{K}$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{L} + \mathrm{L}_{\mathrm{Lag.mult.}} = E\left(R + \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\, \partial_\mu M \partial^\mu M^{-1} \right)$$

S.M.(1997)

$E_{8(+8)}/SO(16)$ nonlinear sigma model

- **対称性がE_8になるのは3階反対称テンソル場があるから**

例外リー代数E_8が存在することと、D=11supergravityが存在することとは互いに無関係ではない！

- **全く同様にD=3,$G_{2(+2)}$/SO(4) nonlinear sigma model を D=5 pure supergravity から構成することができるS.M./Ohta(1998)**

例外リー代数G_2の存在は、D=5 pure supergravityが存在と関係する

“oxidization”

	１１次元超重力	５次元単純超重力
場	$e_\mu{}^\alpha$, $A_{\mu\nu\rho}$, ψ_μ	$e_\mu{}^\alpha$, A_μ, ψ_μ
基本的オブジェクト	2-ブレイン	0-ブレイン
ソリトン	5-ブレイン	1-ブレイン
ホライズン近傍の幾何	$AdS_4\times S_7/AdS_7\times S_4$	$AdS_2\times S_3/AdS_3\times S_2$
D=4 デュアリティー	$E_{7(+7)}$ /SU(8)	$A_{1(+1)}$ /U(1)
D=3 デュアリティー	$E_{8(+8)}$ /SO(16)	$G_{2(+2)}$ /SO(4)
ソリトン上の超対称性	(0,2)	(0,4)
ソリトンのゼロモード	セルフデュアル 2-form	セルフデュアルスカラー

M理論の5次元版？

cf. **D=6, N=1 $G_2\times G_2$ supergravity Holman/Kephart (1998)**

D=1 での E_{10} —— 何が問題か？

- D＝2から1へのリダクションでは Killing vector はlight-like にとらなければならない Nicolai

  $\Leftarrow$ Geroch の compatibility condition

  Duality relation（pure gravityの例）

$$B^{i}_{\mu\nu} = -E^{-1}e^{-2}g^{ij}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho}\partial_{\rho}\psi_{k} \qquad (\mu,\nu,\rho = t,x,y)$$

$$\mu = x,\quad \nu = y \quad \Rightarrow \quad G^{tt} = 0$$

例外　Kasner解はCartan部分群のみに対応し、E_{10}のワイル群が 作用する

- 新しいSL(2,R)がそれまであった対称性と独立か？
- 新しいSL(2,R)が自明に作用していないか？
- Supergravity の solution generating symmetry としてでなく、ストリングのデュアリティーになっているか？

PP(plane)wave solutions

Maximally supersymemtric plane-wave解のT-デュアリティー

Maximal に supersymmetric な IIB plane wave 解

$$ds^2 = 2dx^+dx^- - \mu^2 x^i x^i (dx^+)^2 + dx^i dx^i \quad (i = 1,\ldots,8)$$

$$F_{5+ijkl} = 4\mu\varepsilon_{ijkl}, \quad F_5 = 0 \quad \text{otherwise} \quad (\varepsilon_{1234} = \varepsilon_{5678} = +1)$$ Blau et.al.(2001)

- $AdS_5 \times S^5$ の Penrose 極限
- 30個のキリングベクターをもつ
- Green-Schwarz形式で解ける Metsaev(2002)

そのうち(ノルム)^{2}が
正定数のもの
Michelson(2002)

$$k_{ij}^{\pm} \equiv k_{e_i} \pm k_{e*_j}$$

$$k_{e_i} = -\cos\mu x^+ \partial_i - \mu x^i \sin\mu x^+ \partial_-$$

$$k_{e*_j} = -\sin\mu x^+ \partial_i + \mu x^i \cos\mu x^+ \partial_-$$

- Penrose極限により直接得られるメトリック（Rosen 座標）は X^+ にしかよらず、明白な8個の空間的キリングベクターをもつが、それらのノルムは定数でなく、"T-dual" すると解けなくなる
- k_{e*} はそれらの明白な空間的キリングベクターを Brinkman 座標に書き直したもの
- $\{\partial_-, \ k^+{}_{12}, k^+{}_{34}, k^+{}_{56}, k^+{}_{78}, k^+{}_{32}, k^+{}_{54}, k^+{}_{76}, k^+{}_{18}\}$ は互いに交換する

E_{10}対称性？

$$ds^2 = 2dx^+dx^- - \mu^2 x^i x^i (dx^+)^2 + dx^i dx^i \quad (i=1,\dots,8)$$

$$F_{5+ijkl} = 4\mu\varepsilon_{ijkl}, \quad F_5 = 0 \quad \text{otherwise} \quad (\varepsilon_{1234} = \varepsilon_{5678} = +1)$$

$k^+{}_{87}$ を明白なキリングベクターにもつ座標　Michelson(2002)

$$x^+ = X^+$$

$$x^- = X^- - \mu X^7 X^8$$

$$x^I = X^I \qquad (I=1,\dots,6)$$

$$\begin{bmatrix} x^7 \\ x^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\mu X^+ & \sin\mu X^+ \\ -\sin\mu X^+ & \cos\mu X^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^7 \\ X^8 \end{bmatrix}$$

同様の変換で4つまでキリングベクターを明白にできる

$$\Rightarrow \quad ds^2 = 2dX^+dX^- - \mu^2 X^I X^I (dX^+)^2 - 4\mu X^7 dX^8 dX^+ + dX^i dX^i$$

$(I=1,\dots,6; \quad i=1,\dots,8)$ $\quad F_5$ unchanged

奇妙な点

S^1 にコンパクト化したIIBストリングのスペクトラム　Michelson

'T-デュアル' バックグラウンドでの IIAスペクトラム　Alishahiha et.al.

- 全然同じに見えない
- IIB側では「コリオリの力」のためにmomentum modeが存在しないのに対し、IIA側ではmomentum,winding 両方存在する

S.M./Mogami/
/Satoh
in preparation

Bosonic spectra in light-cone gauge

Bosonic part of GS strings in light-cone gauge

IIB

$$\mathrm{L}_{\mathrm{IIB}} = \int_0^{2\pi} d\sigma \Big[p^+ \partial_\tau X^- + \tfrac{1}{4\pi\alpha'} \Big(\big(\partial_\tau X^i\big)^2 - \big(\partial_\sigma X^i\big)^2 - \mu^2 (X^I)^2 - 4\mu X^7 \partial_\tau X^8 \Big) \Big]$$

$$X^7(\tau, \sigma = 2\pi) = X^7(\tau, \sigma = 0)$$

$$X^8(\tau, \sigma = 2\pi) = X^8(\tau, \sigma = 0) + 2\pi R_{\mathrm{IIB}} w^8$$

$$X \equiv X^7 + iX^8, \quad \overline{X} \equiv X^7 - iX^8$$

$$X(\tau,\sigma) = x_0^8 + ix_0^7 + R_{\mathrm{IIB}} w^8 \sigma + a_0 \sqrt{\frac{\alpha'}{\mu}} e^{-2i\mu\tau} + e^{-i\mu\tau} i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{a_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau+\sigma\right)} + \frac{\tilde{a}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau-\sigma\right)} \right)$$

$$\overline{X}(\tau,\sigma) = x_0^8 - ix_0^7 + R_{\mathrm{IIB}} w^8 \sigma + \overline{a}_0 \sqrt{\frac{\alpha'}{\mu}} e^{2i\mu\tau} + e^{i\mu\tau} i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{\overline{a}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau+\sigma\right)} + \frac{\tilde{\overline{a}}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau-\sigma\right)} \right)$$

- X^I のモードは同じ
- $X^7 = X^7{}_{\mathrm{IIA}}$ が確かめられる
- IIAでは $p^9{}_0$, w^9 両方存在するが、w^9は実はハミルトニアンにきかない

IIA

$$\mathrm{L}_{\mathrm{IIA}} = \int_0^{2\pi} d\sigma \Big[p^+ \partial_\tau X^- + \tfrac{1}{4\pi\alpha'} \Big(\big(\partial_\tau X^i\big)^2 - \big(\partial_\sigma X^i\big)^2 - \mu^2 \big((X^I)^2 + 4(X^7)^2 \big) - 4\mu X^7 \partial_\sigma X^9 \Big) \Big]$$

$$X^7(\tau, \sigma = 2\pi) = X^7(\tau, \sigma = 0)$$

$$X^9(\tau, \sigma = 2\pi) = X^9(\tau, \sigma = 0) + 2\pi R_{\mathrm{IIA}} w^9$$

$$X^7_{\mathrm{IIA}}(\tau,\sigma) = -\tfrac{R_{\mathrm{IIA}}}{2\mu} w^9 + \tfrac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha'}{\mu}} \left(a_0 e^{-2i\mu\tau} - \overline{a}_0 e^{2i\mu\tau} \right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} e^{-i\mu\tau} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{a_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau+\sigma\right)} + \frac{\tilde{a}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau-\sigma\right)} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} e^{i\mu\tau} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{\overline{a}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau+\sigma\right)} + \frac{\tilde{\overline{a}}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau-\sigma\right)} \right)$$

$$X^9(\tau,\sigma) = x_0^9 + \alpha' p_0^9 \tau + R_{\mathrm{IIA}} w^9 \sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} e^{-i\mu\tau} \sum_{n\neq 0} \frac{\mu - n\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}}{in} \left(\frac{a_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau+\sigma\right)} - \frac{\tilde{a}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau-\sigma\right)} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} e^{i\mu\tau} \sum_{n\neq 0} \frac{\mu + n\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}}{in} \left(\frac{\overline{a}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau+\sigma\right)} - \frac{\tilde{\overline{a}}_n}{n} e^{-in\left(\sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}}\tau-\sigma\right)} \right)$$

- $p^9{}_0 = n^9 / R_{\mathrm{IIA}}$ (n^9 は整数)ならハミルトニアンは一致する
- $2\pi\alpha' \Pi_8 = \partial_\sigma X^9$, $2\pi\alpha' \Pi_8 = \partial_\sigma X^9$ が成り立つ

'Narain lattice'が1次元になっている

Plane-wave内のストリングのT-デュアリティー

- O(2,2; Z) 対称性も厳密に確かめられる

  → O(4,4; Z) まではたぶんOK

  O(8,8; Z)?

  +S-デュアリティー ⇒ $E_{9(+9)}(Z)$
- モジュラー不変性?
- ナル キリングベクター ∂_ に付随したSL(2,Z) デュアリティー？

  →もしスペクトラムが一致しなければ、その SL(2,Z) の独立性の証になる!
- フェルミオンのスペクトラム

  S^1の場合 Cvetic et.al.(2002revised)

  O(8,8; Z)?

E_{10} *in M theory : the update*

Future Prospect

- Maximal に supersymemtric な plane-wave解は、E_{10} U-デュアルなファミリーの1つになっている可能性がある
- 様々な理論に現れるW(E_{10})

——謎は深まるばかり…

Panlevé equations, Del Pezzo curfaces, Einstein billiards,…

- 5次元と11次元——繰り返される構造

D=5 pure supergravity

D=6 N=1 $G_2 \times G_2$ supergravity

END