高次元重力理論の楽しみ

小玉英雄 (YITP)

序論

超弦理論・M理論/双対性

- テンソルセクター，ベクトルセクター，スカラセクター，スピノールセクターの自然な統一.
- 摂動論的に整合的.
- （M理論は）宇宙項問題を曖昧さなく解決できる唯一の枠組み.
- 古典極限において，高次元時空を予言.

時空が高次元であることは検証可能か？

$\Rightarrow$ 高次元時空に特有の現象を探せ.

- ブラックホール
- コンパクト化のダイナミクス

4次元ブラックホール

Einstein-Maxwell系

一意性定理

４次元electrovac Einstein-Maxwell系において，漸近的に平坦でホライズン上およびホライズンの外で正則な定常解は(Majumdar-Papapetrou解を除いて）軸対称である．それらのうちホライズンが非縮退で連結なものはKerr-Newmann解に限られ，３個の保存量M, Q, Jにより一意的に定まる．

注

- V: Killing vector, $V \cdot V = 0$ on horizon $\Rightarrow \quad \nabla_V V = \kappa V$

  表面重力 $\kappa \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ 非縮退ホライズン

- 一般に定常ブラックホールは非回転的と回転的の２つに分類される：

  非回転的：時間推進のKilling vector ξがホライズン上で光的.
  回転的：ξがホライズン上で空間的.

非回転ブラックホール

ホライズンが非縮退の場合: Schwarzschild/Reissner-Norström 解

- 非回転で真空 $\Rightarrow$ 静的でホライズンは分岐型 [Rácz and Wald (1996)].
- 静的でホライズンが連結 $\Rightarrow$ 球対称 [Israel (1967,1968), Müler-zum-Hagen et al(1973,1974)].
- 静的 $\Rightarrow$ 空間が共形的に平坦 $\Rightarrow$ 球対称
  (正エネルギー定理の応用)
  [Bunting, Masood-ul-Alam (1987, 1992), Ruback (1988)].

ホライズンが縮退している場合:

- 真空 $\Rightarrow$ 正則解なし
- すべてのブラックホールが同符号の電荷をもつ
  $\Rightarrow$ Majumdar-Papapetrou 解 [Chruściel (1999)].

$$ds^2 = -H^{-2}dt^2 + H^2 d\boldsymbol{y}^2; \quad H = \sum_k \frac{M_k}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_k|}.$$

回転ブラックホール

- ホライズンが連結，球に同相，非縮退 (かつ時空とホライズンが解析的)
  ⇒ 軸対称
  [Hawking, Ellis (1972, 1973)]

- 光的収束条件が成り立ちホライズンが非縮退
  ⇒ ホライズンの連結成分は球と同相
  (位相検閲定理を利用[Friedmann, Schleich & Witt (1993)]) [Chruściel and Wald (1994)]

- 時空とホライズンが解析的 ⇒ 軸対称
  (ホライズンの連結性や非縮退の仮定なし [Chruściel (1996)])

軸対称解

- 真空でホライズンが連結，非縮退 $\Rightarrow$ Kerr
  [Carter (1972,1973), Robinson (1975)]

- Electrovacuum でホライズンが連結，非縮退 $\Rightarrow$ Kerr-Newman
  (σ-model の利用 [Robinson (1974), Mazur (1982)])

- 共通の回転軸以外で正則
  $\Rightarrow$ N 個のブラックホールを含む一般解は，真空の場合 $3N-1$ 個，electrovacuum の場合 $4N-1$ 個のパラメータをもつ
  これらの族に軸上でも正則な解が含まれるかどうかは不明($N \geq 2$).
  [Weinstein (1994, 1996)]

電磁場以外の物質を含む系

静的Einstein-Maxwell-Dilaton系:

非縮退ホライズン $\Rightarrow$ Gibbons-Maeda解

[Masood-ul-Alam(1993), Mars & Simon(2001), Gibbons, Ida & Shiromizu(2002), Rogatko(1999,2002)]

定常Einstein-Harmonic Scalar系:

非縮退ホライズン $\Rightarrow$ Kerr

[Breitenlohner, Maison & Gibbons(1988), Heusler(1993,1995)]

静的Einstein-Maxwell-Dirac系:

非縮退ホライズン $\Rightarrow$ Reissner-Nordstöm black hole

[Finter, Smoller & Yau (2000)]

一意性の成り立たない系

Einstein-Yang-Mills系:

Schwarzschild解以外に，球対称で正則なソリトン解の族と正則なブラックホール解が存在.

[Bartnik & McKinnon(1988), Volkov & Gal'tsov(1990), Künzle & Masood-ul-Alam(1990)]

ただし，これらの解は不安定.

[Straumann & Zhou(1990), Bizon (1991), Zhou & Straumann(1991)]

Einstein-Skyrime系:

Skyrme hairをもつ球対称正則ブラックホール解が存在.

[Droz, Heusler & Straumann(1991)]

この解は安定.

[Heusler, Droz & Straumann(1991,1992), Heusler, Straumann & Zhou(1993)]

$\Lambda \neq 0$の系

漸近的にAdS時空では，漸近的に球対称なブラックホール解は一意的である可能性が高い.

> 漸近的にAdSで1個の非縮退正則ブラックホールを含む静的真空解は，時空が共形的にC^2完備化をもち，漸近的に共形的球対称なら，Schwarzschild-AdSブラックホール解と一致する．[Anderson (2001), Anderson, Chrusciél & Delay (2002)]

これに対して，$\Lambda > 0$の場合には，一意性は不明.

安定性

ブラックホールの一意性は必ずしもその安定性を意味しない． 特に，宇宙検閲仮説が成り立たない場合には，正則な定常ブラックホール解は，一般的な摂動に対して不安定でなければならない．[Wald (1997)].

ただし，実際には，多くの標準的なブラックホール解が摂動的に安定であることが示されており，宇宙検閲仮説を支持する事実と見なされている．

Schwarzschild black hole: stable

[Vishveshwara(1970), Price(1972), Wald(1979,1980)]

Reissner-Nordström black hole: stable

[Chandrasekhar (1983)?]

Kerr black hole: stable

[Whiting (1989)]

Kerr-Newman black hole: unknown

Schwarzschild/Reissner-Nordoström-dS & -AdS: stable

[Kodama & Ishibashi (2003)]

高次元ブラックホール

静的ブラックホールの一意性

- Vacuum: unique (Tangherlini-Schwarzschild)
  [S. Hwang(1998), Rogatko(2003)]
- Einstein-Maxwell: unique (HD RN or Majumdar-Papapetrou)
  [Gibbons, Ida & Shiromizu(2002), Rogatko(2003)]
- Einstein-Maxwell-Dilaton system: unique (Gibbons-Maeda sol)
  [Gibbons, Ida & Shiromizu(2002)]
- Einstein-Harmonic scalar system: unique (Tangherlini-Schwarzschild)
  [Rogatko (2002)]

証明の概要

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j,$$

$$\triangle V = 0; \quad V = 1 - \frac{2M}{r^{n-1}} + O\left(\frac{1}{r^n}\right), \ (n = D-2)$$

$$R_{ij} - \frac{1}{V} D_i D_j V = 0; \quad g_{ij} = \left(1 + \frac{4M}{r^{n-1}}\right)\delta_{ij} + O\left(\frac{1}{r^n}\right).$$

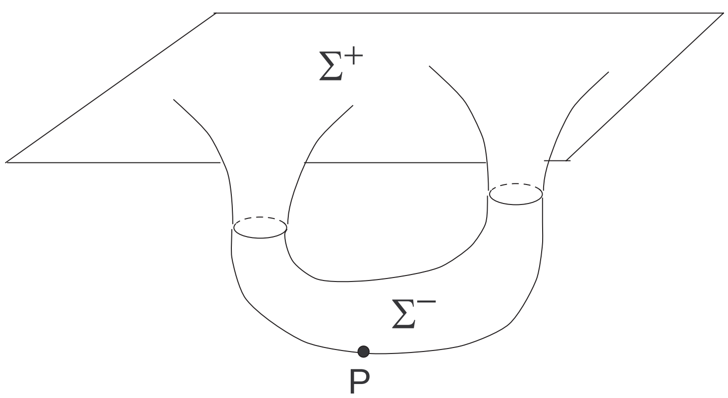
共形変換

$$\Sigma^{\pm} : \tilde{g}^{\pm}_{ij} = \Omega^2_{\pm} g_{ij}; \quad \Omega_{\pm} = \left(\frac{1 \pm V}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow \quad \tilde{\Sigma} = \Sigma^{+} \cup \Sigma^{-} \cup p$: 正則,

漸近的平坦，ゼロ質量かつ $\tilde{R} = 0$

$\Rightarrow \quad (\tilde{\Sigma}, \tilde{g}_{ij})$: 平坦 (正エネルギー定理).



共形的に平坦 $\Rightarrow$ 球対称

4次元時空の場合：

Bach tensor $R_{ijk} := D_k R_{ij} - D_j R_{ik} + \frac{1}{4} g_{ik} D_j R - \frac{1}{4} g_{ij} D_k R = 0$

$0 = R_{ijk} R^{ijk} = 4 V^{-4} \rho^{-4} (2 \rho^2 \hat{K}_{AB} \hat{K}^{AB} + D^A \rho D_A \rho);$

$\rho^{-1} := (DV)^2$

$\Rightarrow$ $V = \mathrm{const}$ は球対称

$D \geq 5$ の場合：

ホライズンは平坦な空間 Σ^+ においてtotally umbilic

$\Rightarrow$ ホライズンは Σ^+ のEuclid球面（剛性定理）

Ω_+ は Σ^+ で調和的かつホライズン球上で定数

$\Rightarrow$ 球対称解が一意的な解.

静的ブラックホールの安定性

線形解析

一般に，計量の線形摂動 $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ は，次の線形化された Einstein 方程式に従う：

$$(\triangle_L h)_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h + 2\nabla_{(\mu}\nabla^\alpha h_{\nu)\alpha} + (-\nabla^\alpha\nabla^\beta h_{\alpha\beta} + \triangle h + R^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta})g_{\mu\nu}$$
$$+(2\Lambda - R)h_{\mu\nu} = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu}.$$

ここで，$\triangle_L$ は Lichnerowicz 作用素である：

$$\triangle_L h_{\mu\nu} := -\nabla^2 h_{\mu\nu} + 2R_{\alpha(\mu}h^\alpha_{\nu)} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}.$$

背景時空が（高次元dS/AdS）Schwarzschild(/Reissner-Nordstöm)時空

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma_n^2$$

で与えられるとき，球面S^n上の調和テンソル展開により，この摂動方程式は次のマスター方程式に帰着される[Kodama & Ishibashi (2003)]：

$$-f\frac{d}{dr}\left(f\frac{d\Phi}{dr}\right) + V(r)\Phi = \omega^2\Phi\ (= -\partial_t^2\Phi).$$

- ４次元では，ブラックホール電荷や宇宙項の符号によらず$V(r)$はホライズンの外で常に正である．
- 高次元では一般に$V(r)$はホライズンの外に負の領域をもつ． しかし，適当な$h(r)$を用いたS変形

$$-fh\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{h^2}\frac{d}{dr}(h\Phi)\right) + \tilde{V}(r)\Phi = -\omega^2\Phi$$

により$\tilde{V} \geq 0$とできる場合には，ブラックホールの安定性が保証される．

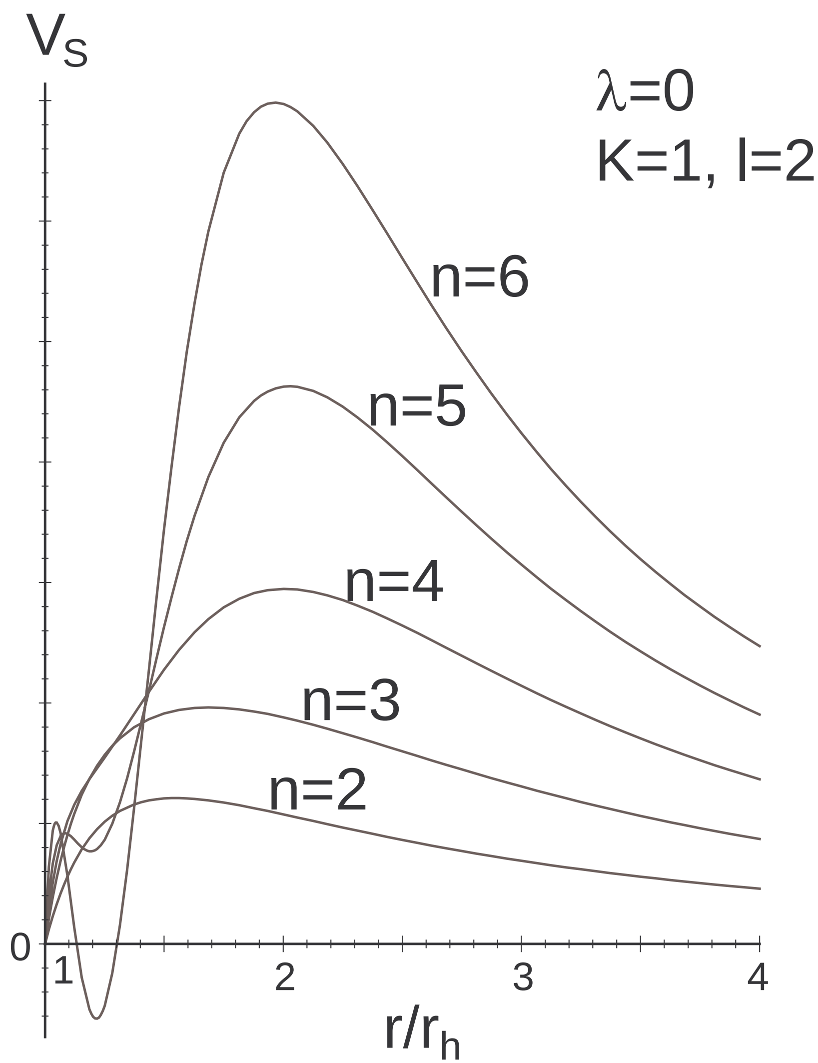
例えば，スカラ型摂動の電磁モードに対して

$$V_{S+} = fU_+/(64r^2H_+^2); \quad H_+ = 1 - n(n+1)\delta x/2, \quad r = 2M/r^{n-1}$$

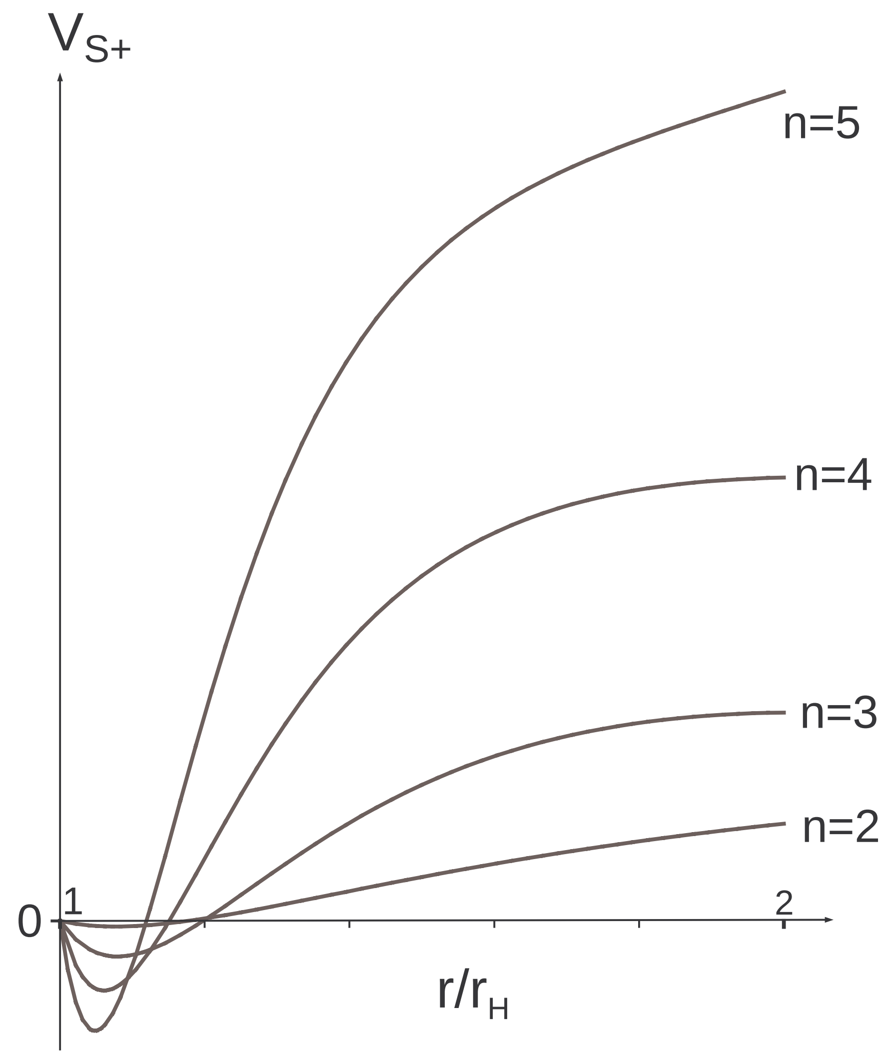
$$\begin{aligned}U_+ = &\left[-4n^3(n+2)(n+1)^2\delta^2x^2 - 48n^2(n+1)(n-2)\delta x - 16(n-2)(n-4)\right]\lambda r^2\\ &-\delta^3n^3(3n-2)(n+1)^4(1+m\delta)x^4 + 4\delta^2n^2(n+1)^2\left\{(n+1)(3n-2)m\delta + 4n^2 + n - 2\right\}x^3\\ &+4\delta(n+1)\left\{(n-2)(n-4)(n+1)(m+n^2K)\delta - 7n^3 + 7n^2 - 14n + 8\right\}x^2\\ &+\left\{16(n+1)\left(-4m+3n^2(n-2)K\right)\delta - 16(3n-2)(n-2)\right\}x + 64m + 16n(n+2)K.\end{aligned}$$

$$h = r^{n/2-1}H_+ \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_{S+} = \frac{k^2f}{2r^2H_+}\left[(n-2)(n+1)\delta x + 2\right].$$

Example of V_S $(Q = 0)$



Example of V_{S+} $(Q \neq 0)$



K=1, λ<0, Q^2/M^2 =0.1, l=2

解析結果

	Neutral	Charged
$\Lambda = 0$	$\forall d$: unique & stable	$\forall d$: unique $d \geq 6$: stability ?
$\Lambda > 0$	$\forall d$: pert. unique $d \geq 7$: stabilty ?	$d = 4, 5$: pert. unique & stable $d \geq 6$: ?
$\Lambda < 0$	$\forall d$: pert. unique $d \geq 5$: stability ?	$d = 4$: pert. unique & stable $d \geq 5$: ?

[Kodama & Ishibashi (2003, 2004)]

Gregory-Laflamme不安定

ブラックブレイン解

D次元直積型時空

$$M_D = X_m \times Y_n; \quad ds^2 = ds^2(X) + ds^2(Y)$$

に対する真空Einstein方程式は

$$R_{\mu\nu}(X) = -\lambda g_{\mu\nu}(X), \quad R_{pq}(Y) = -\lambda g_{pq}(Y).$$

- $D \le 4$では，$m, n \le 3$なので,（局所的）Minkowski時空ないし dS$^2 \times S^2$, AdS$^2 \times H^2$のみが解.
- $D \ge 5$では，$m \ge 4$なら自明でない無限個の解が存在.
  例えば,

$$\text{4D ブラックホール} \times (\mathbb{R}^n \text{ or } T^n).$$

安定性

ブラックブレイン解

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_n^2 + dx^p dx^p$$

の摂動（S-モード）

$$\delta g_{ab} = F_{ab}(t,r)e^{ikx}, \quad \delta g_{ap} = F_a(t,r)e^{ikx}, \quad \delta g_{pq} = F(t,r)\left(\delta_{pq} - \frac{k_p k_q}{k^2}\right)e^{ikx}$$

に対する Einstein 方程式は次のマスター方程式に帰着される：

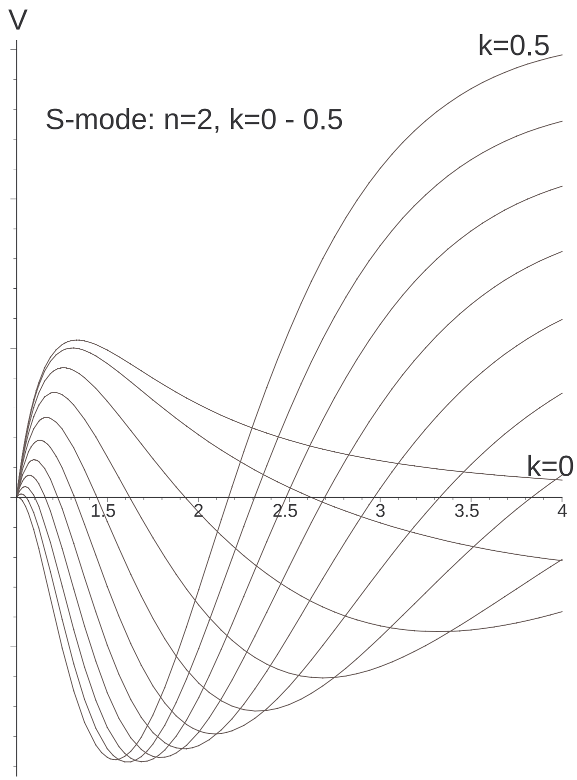
$$\omega^2 \Phi = -f\left(f\Phi'\right)' + f\left[k^2 + \frac{n(n-2+nx)}{4r^2}\right]\Phi$$

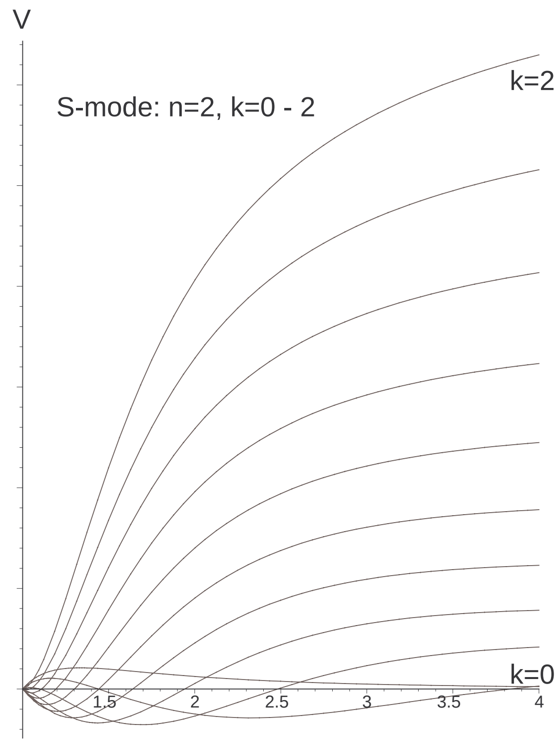
$$\omega^2 \Psi = -f\left(f\Psi'\right)' + V\Psi + g\Phi.$$

有効ポテンシャルVは$0 < k^2 < k_0^2 = O(1/r_h^2)$で負の領域をもつ：

$$V = \frac{f}{H^2}U; \quad H = k^2 + \frac{n(n-1)x}{2r^2}, \quad x = \left(\frac{r_h}{r}\right)^{n-1}$$

$$U = k^6 + k^4\frac{n+4}{4r^2}(n+2-3nx) - k^2\frac{n(n-1)}{4r^4}[3n(n+2) - (2n^2+3n+4)x]x + \frac{n^3(n-1)^2}{16r^6}x^2(n-2+nx).$$





- ブラックブレイン解に対して，S-モードは$0 < k^2 < k_c^2 = O(1/r_h^2)$で不安定となる[Gregory & Laflamme (1993)].

- 宇宙項が負の場合のブラックストリング解も同様の不安定性をもつ[Gregory (2000), Hirayama & Kang (2001)]：

$$ds^2 = dy^2 + \rho(y)^2 ds^2(X); \quad R_{\mu\nu}(X) = -\lambda g_{\mu\nu}(X).$$

- 作用積分

$$S = \int d^D x \left[R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4} F_n \cdot F_n \right]$$

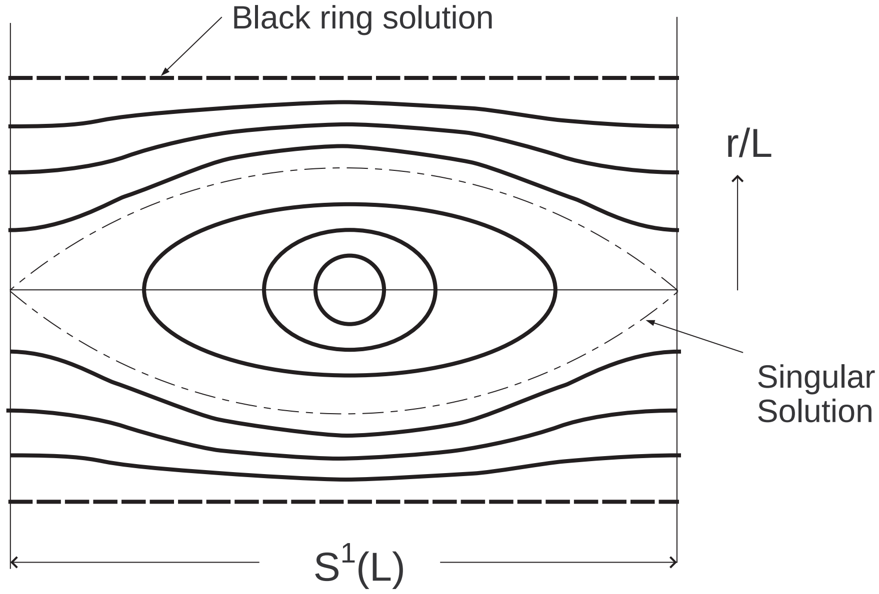
を持つ系において，フォーム場に付随する磁気電荷をもつブレイン解（NS5, Dp）でも同様の不安定が起きる．ただし，臨界的ブレイン($Q^2 = M^2$）は常に安定[Gregory & Laflamme (1994), Hirayama, Kang & Lee (2003)].

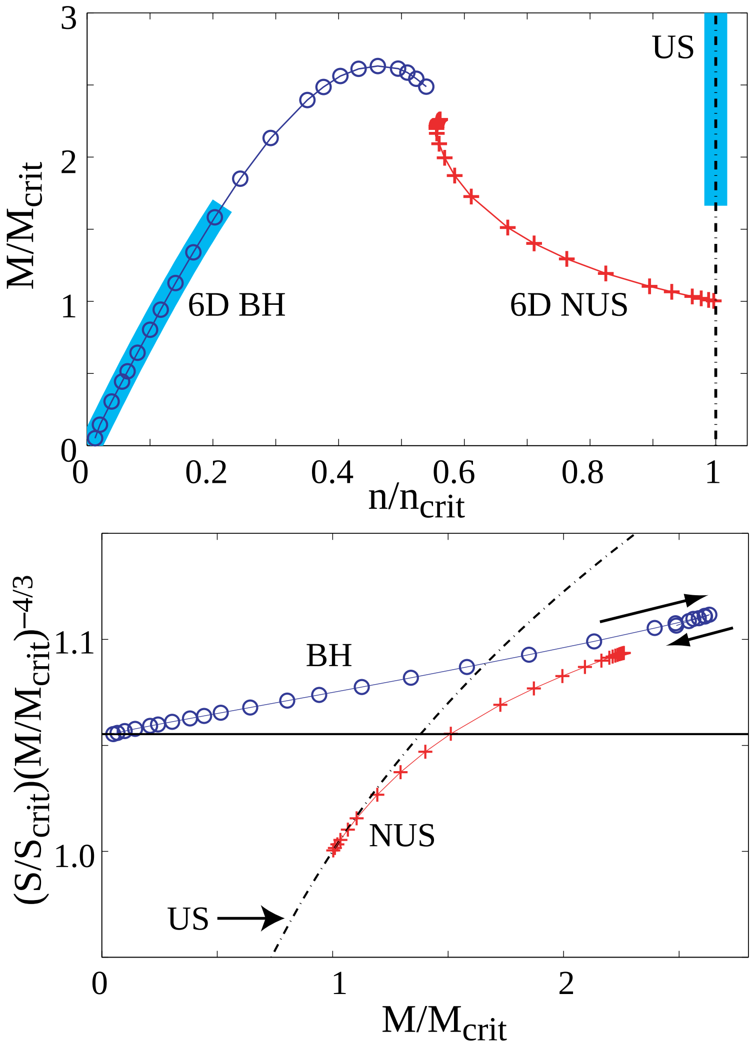
$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 d\Omega_n^2 + h(r)dx_p dx^p,$$
$$F_n \propto d\Omega_n.$$

不安定性の意味するもの

$M = X \times S^1$ 型時空におけるブラックホール解の一意性の破れ，裸の特異点の発生

[Wisemann & Kudoh (2003,2004)]:





5次元Weyl解

一般化されたWeyl形式

3つの互いに可換で直交するKillingベクトルξ, η_1, η_2をもつ5次元時空を考える：

$$ds^2 = -e^{2U_0}dt^2 + e^{2U_1}d\phi_1^2 + e^{2U_2}d\phi_2^2 + e^{2\nu}(d\rho^2 + dz^2).$$

この時空に対する真空Einstein方程式は

$$\rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\rho U_i) + \partial_z^2 U_i = 0; \quad \sum_i U_i = \ln\rho,$$

$$\partial_\rho\nu = -\rho\sum_{i<j}\left(\partial_\rho U_i\partial_\rho U_j - \partial_z U_i\partial_z U_j\right), \quad \partial_z\nu = -\rho\sum_{i<j}\left(\partial_\rho U_i\partial_z U_j - \partial_z U_i\partial_\rho U_j\right).$$

すなわち，2つの独立なLaplace方程式に帰着され，任意の解の重ね合わせが容易に構成できる.

Rod Picture

Weyl座標(ρ, z)のもとで，z軸上の線分$a < z < b$におかれた線密度1/2のロッドを重力源とするNewtonポテンシャルを$U(a, b)$とする：

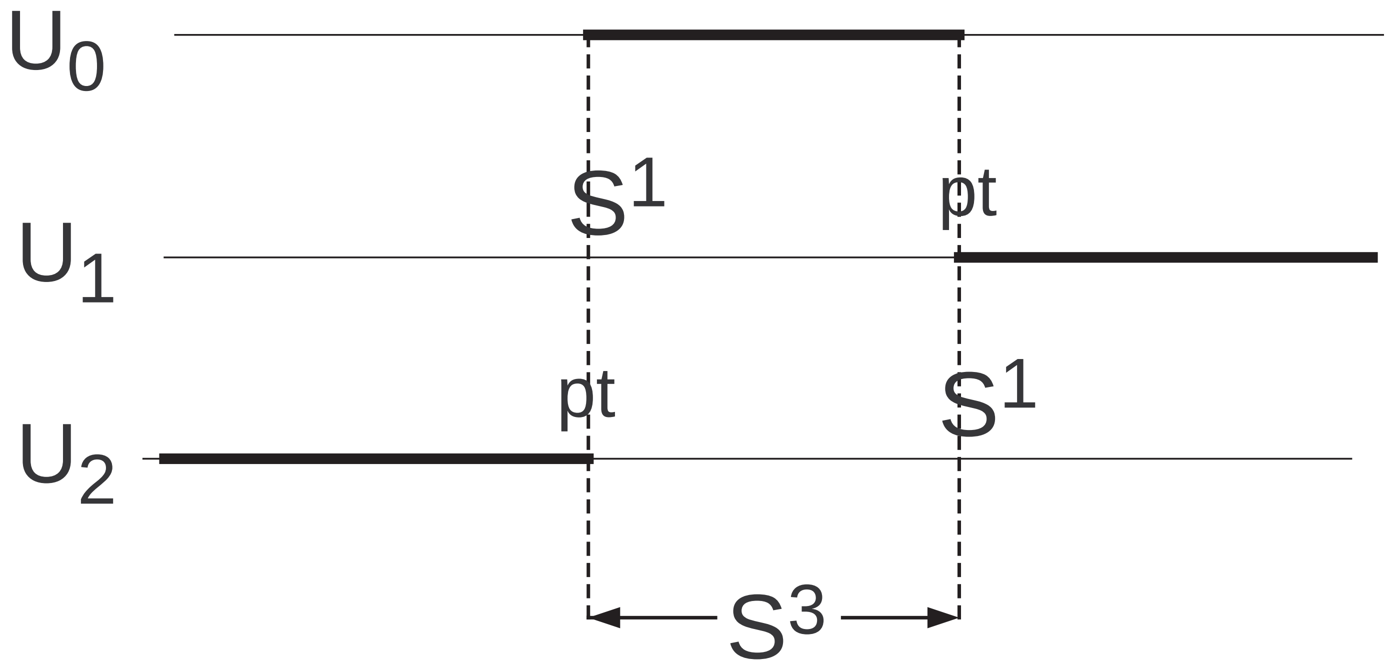
$$e^{2U} = c(a,b)\frac{z - b + \sqrt{\rho^2 + (z-b)^2}}{z - a + \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}}.$$

- このポテンシャルを用いると，5D Schwarzschild計量に対するWeylポテンシャルは，ホライズン半径を$r = 2\sigma$とするとき，

$$U_0 = U(-\sigma, \sigma), \quad U_1 = U(\sigma, +\infty), \quad U_2 = U(-\infty, -\sigma).$$

- WeylポテンシャルU_iに対する拘束条件は，z軸上の任意の点で線密度の和が常に1/2となる要請と同等:

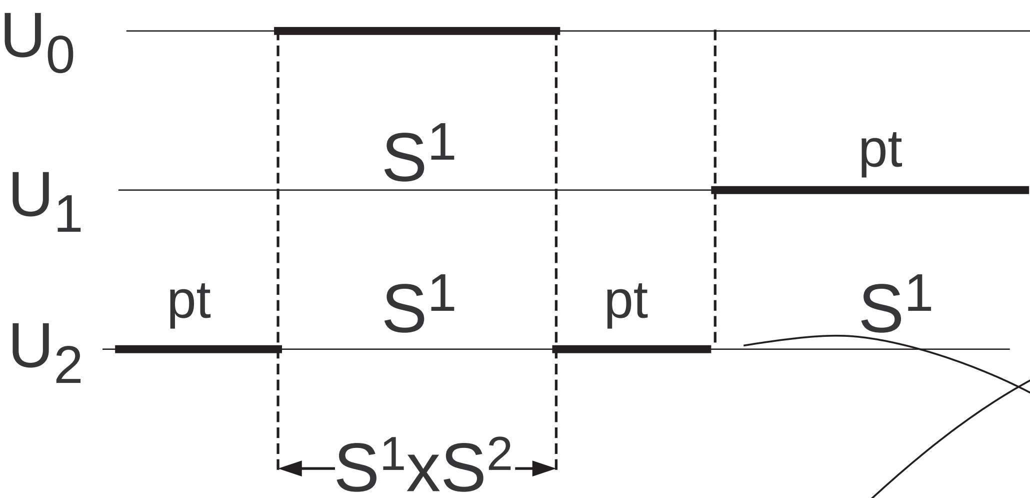
$$U_0 + U_1 + U_2 = U(-\infty, +\infty).$$



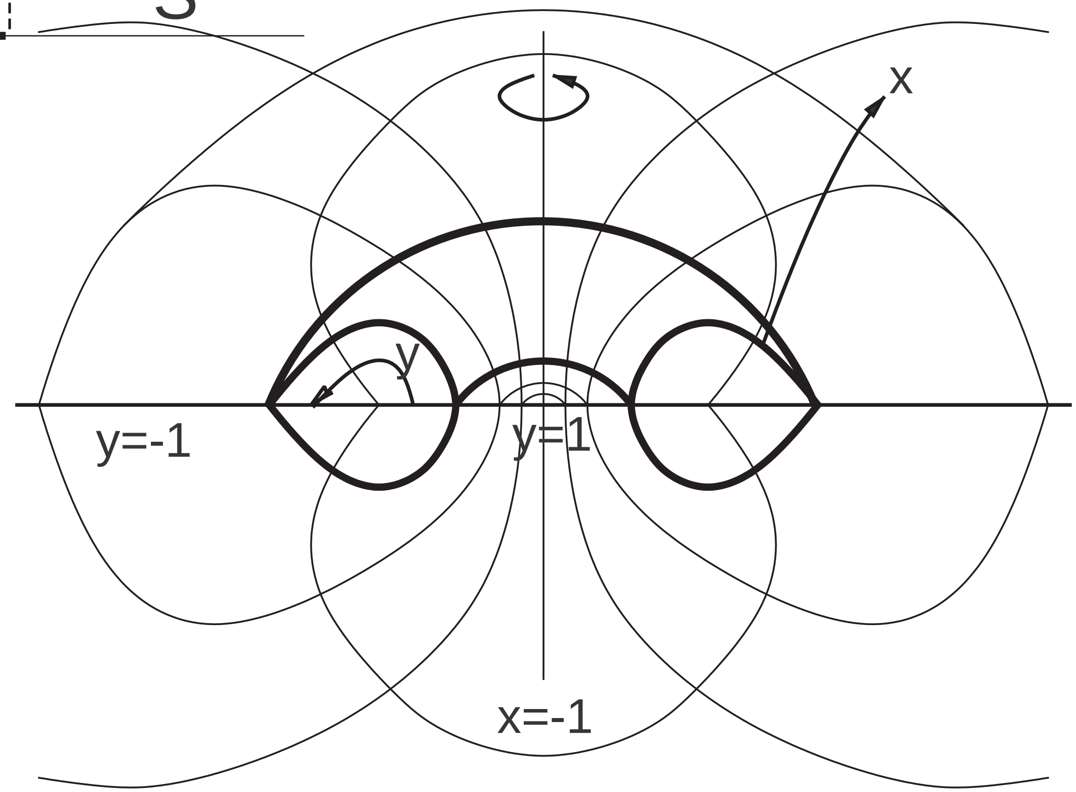
5D Schwarzschild Black Hole

- Rod 近傍では $e^{U_i} \propto \rho$
- Horizon: $e^{U_0} = 0$.
- ϕ_i 回転軸の半径: e^{U_i}

静的ブラックリング解



Static Black Ring



対応するWeyl ポテンシャルU_iは

$$U_0 = U(a_3, a_2), \quad U_1 = U(a_1, \infty), \quad U_2 = U(-\infty, a_3) + U(a_2, a_1).$$

ここで,

$$a_1 = \frac{1}{2A}, \quad a_2 = \frac{\mu}{2A}, \quad a_3 = -\frac{\mu}{2A}.$$

Weyl 座標の代わりに，(x, y) 座標

$$\rho = \frac{\sqrt{F(x)F(y)(x^2-1)(1-y^2)}}{A(x-y)^2}, \quad z = \frac{(1-xy)(F(x)+F(y))}{2A(x-y)^2}.$$

を用いると，静的なブラックリング解の計量は[Emparan & Reall (2001)]

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{F(y)}{F(x)}dt^2 + \frac{F(y)F(x)^2}{A^2(x-y)^2}\left[\frac{x^2-1}{F(x)^2}d\phi_1^2 + \frac{1-y^2}{F(y)^2}d\phi_2^2 \right. \\ & \left. + F(x)^{-1}\frac{dx^2}{x^2-1} + F(y)^{-1}\frac{dy^2}{1-y^2}\right]. \end{aligned}$$

ここで，$F(\zeta) = 1 - \mu\zeta$.

漸近的平坦性： $x=y=-1$ が無限遠で，DOC は $x\le -1$，$|y|\le 1$.
x, y を

$$x+1=-\frac{2(1+\mu)^2\sin^2\theta}{A^2r^2-4},\qquad y+1=\frac{2(1+\mu)^2\cos^2\theta}{A^2r^2}$$

とおくと，$r\to\infty$ で

$$ds^2\to -dt^2+dr^2+r^2\left[d\theta^2+\sin^2\theta d\psi^2+\cos^2\theta d\phi^2\right],$$

$$-g_{tt}\to 1-\frac{2\mu(1+\mu)}{A^2r^2}\Rightarrow\qquad GM=\frac{2\pi\mu(1+\mu)}{A^2}.$$

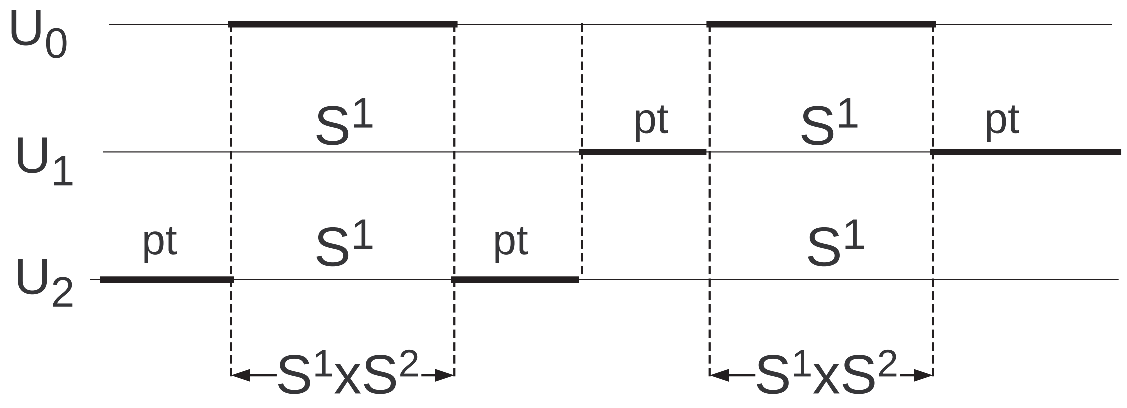
（$\mu=1$ のとき，$D=5$ Schwarzschild 計量と一致.）

ホライズン： 内円周の長さと面積は

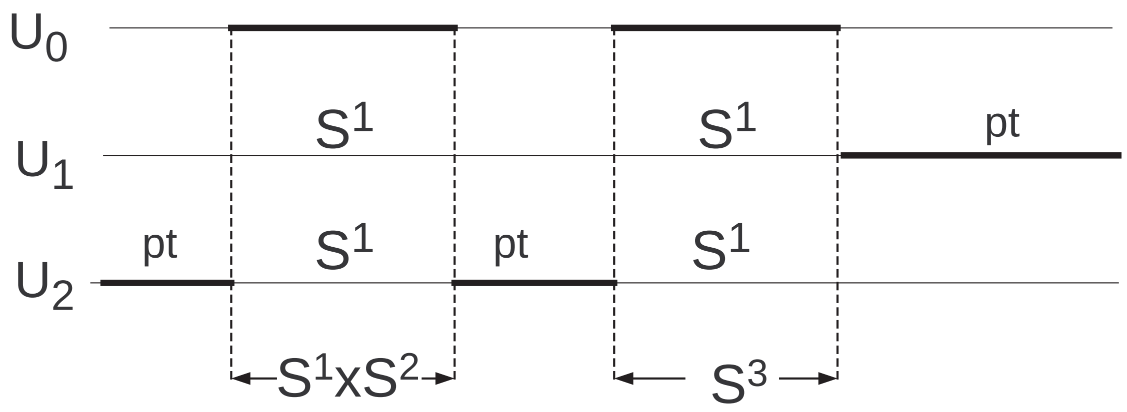
$$L=\frac{2\pi}{A}\sqrt{(1-\mu)(1\pm\mu)},\qquad \frac{A_H^2}{8\pi(GM)^3}=\frac{\mu(1\pm\mu)}{(1+\mu)^2}\le\frac{\mu}{1+\mu}\le 1.$$

Angle deficit: $\Delta\psi=2\pi\sqrt{1+\mu},\quad \Delta\phi=2\pi\sqrt{1\pm\mu}.$

多重ブラックリング解



Static Orthogonal Black Rings



Static Black Ring & Black Hole

回転ブラックホール解

Myers-Perry解

Kerr解の一般次元Dへの一般化[Myers & Perry (1986)]:

$$ds^2 = d\bar{s}^2(E^{D-1,1}) + \frac{2M}{U} k_* \otimes k_*; \ \text{(Kerr-Schild form)}$$

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + F dr^2 + \sum_{i=1}^{n} (r^2 + a_i^2) d\mu_i^2 + \sum_{i=1}^{n-\epsilon} (r^2 + a_i^2) \mu_i^2 d\phi_i^2$$

$$k_* = W dt + F dr - \sum_{i=1}^{n-\epsilon} (a_i^2 \mu_i^2) d\phi_i,$$

$$U = r^{\epsilon-2} F \prod_{j=1}^{n-\epsilon} (r^2 + a_j^2), \quad F = r^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i^2}{r^2 + a_i^2}.$$

ここで，$D = 2n + 1 - \epsilon$ $(\epsilon = 0, 1)$ で，$\epsilon = 1$のとき，$a_n = 0$. また，μ_iは$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$ を満たす.

- 質量 M と $[(D-1)/2]$ 個の角運動量 a_j をパラメータをもつ漸近的に平坦な真空解.

- 一般の角運動量に対しては，等長変換群は $\mathbb{R} \times U(1)^{[(D-1)/2]}$.

- ホライズンの位相は $S^{D-2} \times \mathbb{R}$.

- $D \geq 6$ のとき，質量 M を固定したとき，角運動量の大きさに上限はない.

- ブラックホール熱力学の第１法則が成り立つ：

$$\frac{\kappa}{8\pi G} dA = dM - \sum_i \omega_i dJ_i.$$

（注）宇宙項 $\Lambda \neq 0$ の場合への一般化あり [Gibbons GW, Lü H, Page DN, Pope CN(2004)].

Emparan-Reall解

回転による遠心力と重力の釣り合った，conic singularityを持たないブラックリング解が存在[Emparan & Reall (2001)]:

$$ds^2 = -\frac{F(y)}{F(x)}\left(dt - \sqrt{\mu\nu}\frac{x+\alpha}{A}d\psi\right)^2$$
$$+\frac{1}{A^2(x-y)^2}\left[-F(y)\left(G(x)d\psi^2 + \frac{F(x)}{G(x)}dx^2\right) + F(x)^2\left(\frac{dy^2}{G(y)} + \frac{G(y)}{F(y)}d\phi^2\right)\right].$$

ここで,

$$F(\xi) = 1 - \mu\xi, \quad G(\xi) = 1 - \xi^2 + \nu\xi^3 = \nu(\xi+\alpha)(\xi-\beta)(\xi-\gamma),$$
$$-1 < -\alpha < 0 < 1 < \beta < \gamma < 1/\nu, \quad \beta \leq 1/\mu,$$
$$0 < \nu < 2/(3\sqrt{3}).$$

- 漸近的に平坦で(DOC: $x < -\alpha \le y \le \beta$), $x = y = -\alpha$を無限遠, $x = -\infty$をホライズンとして持つ.

- $\beta = 1/\mu(\nu = \mu - \mu^3;\ 1/\sqrt{3} < \mu \le 1)$のとき特殊MP解$(a_1 = a, a_2 = 0)$を表し，ホライズンの位相は$S^3 \times \mathbb{R}$.

- $\mu = 2/\gamma - 3/\gamma^3\ (\gamma > 1/\sqrt{3})$のとき正則な回転ブラックリング解となり，ホライズンの位相は$S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$.

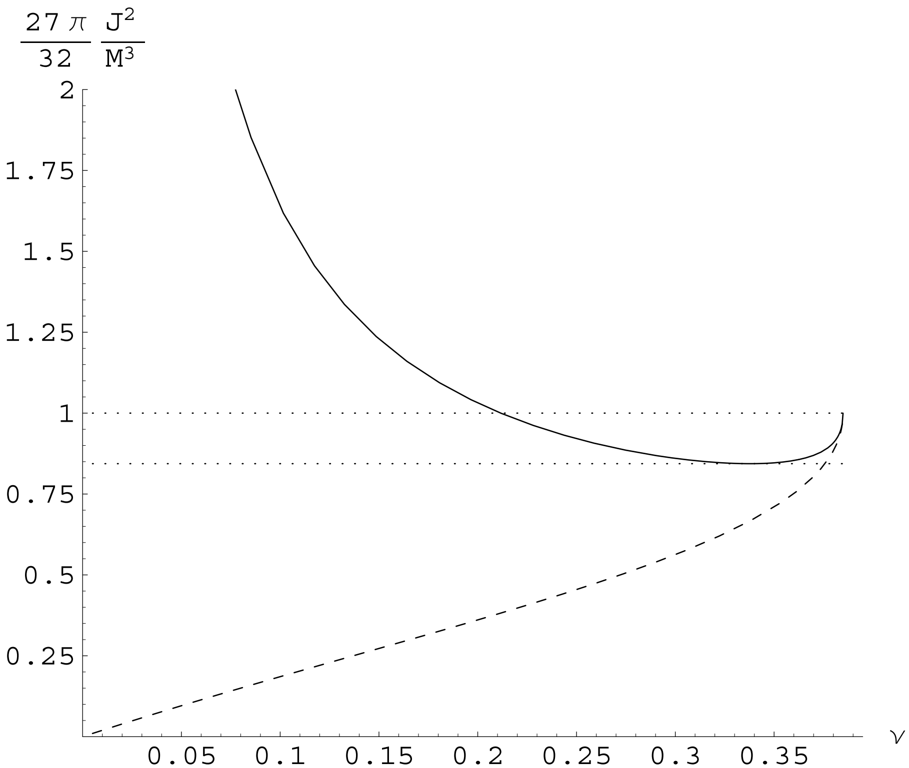
- 回転正則ブラックリング解は$x = -1$軸の周りの角運動量のみをもち，その大きさは下限をもつ：$\pi J^2 \ge M^3$.

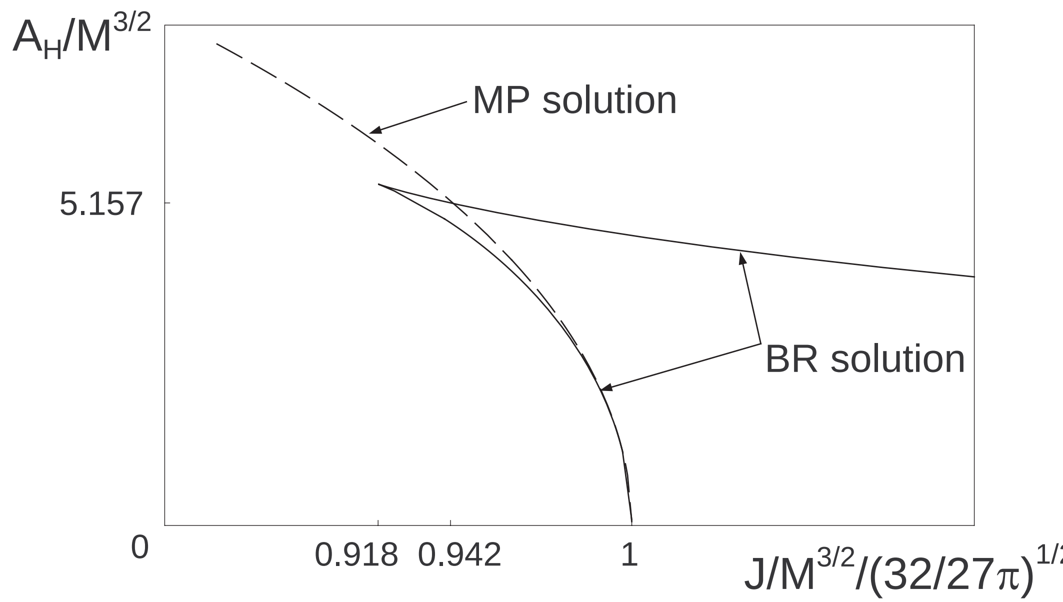
- ある領域で，同じ質量Mと角運動量Jをもつ正則MP解と2つの異なるサイズをもつ正則ブラックリング解が存在する（一意性の破れ）.

- ブラックリング解は，Gregory-Laflamme型の不安定性をもつ可能性がある.

J^2/M^3 と ν の関係

ホライズン面積と角運動量の関係



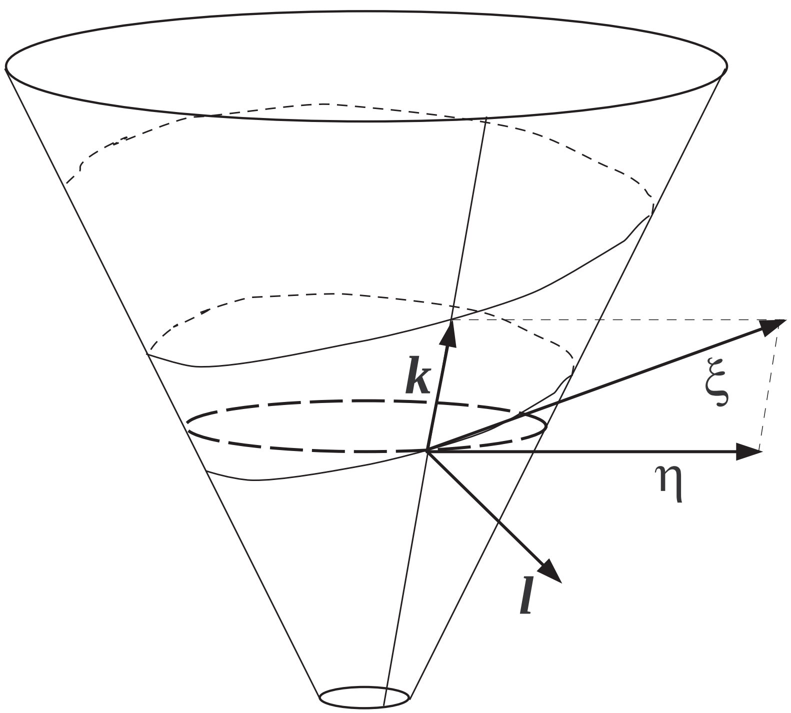


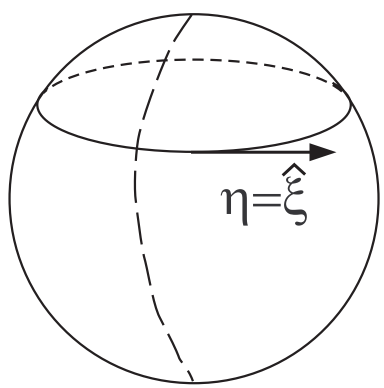
高次元ブラックホールの諸問題

- 漸近的に平坦な５次元定常正則真空ブラックホール解はMP解とER解でつくされるか？　（ホライズンが S^3 で時空が $\mathbb{R} \times U(1)^2$ 対称ならMP解 [Morisawa & Ida (2004)].）
- MP解とER解は安定化か？ Cf. Emparan & Myers (2003).
- ５次元定常正則ブラックホールは常に，空間的に $U(1)^2$ 不変性をもつか？ Cf. Reall予想 [Reall(2003)]
- ５次元定常正則ブラックホールのホライズン位相は S^3 と $S^2 \times S^1$ に限られるか?
- $\Lambda \neq 0$ の場合に，ブラックリング解は存在するか？
- ブレインワールドモデルでSO(3)対称性をもちホライズンがコンパクトなブラックホール解は一意的に存在するか？また，どのような構造をもつか？
- 高次元定常正則ブラックホールのホライズンはどのような位相を持ち得るか？
- 高次元定常正則ブラックホールはどのような空間的対称性を持ち得るか？
- 高次元では裸の特異点の発生は不可避か？(宇宙検閲仮説の破れ)

Reall予想

$D \geq 5$でも，空間的等長変換群が$U(1)$と一致する（漸近的に平坦な）正則ブラックホール解が存在する．





ホライズンの位相

- 静的なブラックホールに対しては，ある程度の制限が得られている [Cai & Galloway (2001)].

  弱エネルギー条件 $S = T_{00} + \Lambda \geq 0$ が満たされるとき，空間 Σ^{D-1} のコンパクトな境界となる極小部分多様体 H^{D-2} は正のスカラ曲率をもつか，H^{D-2} 上で $S \equiv 0$ で H^{D-2} は Σ^{D-1} の中で全測地的かつ Ricci 平坦である．

  $D = 5$ のときは，H^3 はホモトピー球面 $/\Gamma$ ないし $S^2 \times S^1$ のいくつかの連結和に微分同相である．

- 5次元極小超重力理論 $(+U(1)^N$ ゲージ場) では，回転的な場合も含めて，超対称ブラックホール解のホライズンの位相が決定されている [Reall (2002), Gutowski (2004)].

  超対称解はホライズン近傍で，局所的に $E^{4,1}$，$\mathrm{AdS}^3 \times S^2$，BMPV 時空の構造をもつ．

超重力理論

超対称ブラックホール解

５次元極小SUGRA+$U(1)^{N-1}$ゲージ場系の超対称解の分類

[Gauntlett et al (2002),Gauntlett & Gutowski (2004)]

Killingスピノール⇒　　微分形式:

$$f = i\bar{\epsilon}\epsilon, \quad V_\mu = -\bar{\epsilon}\gamma_\mu\epsilon, \quad J^{(1)} + iJ^{(2)} = -{}^t\epsilon C\gamma_{\mu\nu}\epsilon, \quad J^{(3)} = -\bar{\epsilon}\gamma_{\mu\nu}\epsilon.$$

- $V \cdot V = -f^2$: V_μは常に，時間的ないし光的Killingベクトル.
  例えば，時間的な場合

$$ds^2 = -f^2(dt+\omega)^2 + |f|^{-1}ds^2(X_4).$$

- $J^{(i)}$は$ds^2(X_4) = h_{mn}dx^m dx^n$の(反)自己双対hyper-Kähler構造を与える.

$$J_m^{(i)p} J_p^{(j)n} = -\delta^{ij}\delta_m^n + \epsilon_{ijk}J_m^{(k)n},$$
$$^h\nabla J^{(i)} = 0, \quad *_h J^{(i)} = \mp J^{(i)}.$$

作用積分:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int R*1 - G_{IJ} dX^I \wedge dX^J - G_{IJ} F^I \wedge dF^J - \frac{1}{6} C_{IJK} F^I \wedge F^J \wedge A^K.$$

ここで,

$$C_{IJK} = C_{(IJK)}: \ C_{IJK} C_{J'(LM} C_{PQ)K'} \delta^{JJ'} \delta^{KK'} = \frac{4}{3} \delta_{I(L} C_{MPQ)},$$

$$C_{IJK} X^I X^J X^K = 1,$$

$$2G_{IJ} = 9X_I X_J - C_{IJK} X^K; \quad 6X_I = C_{IJK} X^J X^K.$$

解の一般形:

$$f d\omega = G^+ + G^-; \quad *_h G^\pm = \pm G^\pm,$$

$$F^I = d(f X^I (dt + \omega)) + \Theta^I; \quad *_h \Theta^I = \pm \Theta^I,$$

$$G^\pm = -\frac{2}{3} X_I \Theta^I.$$

$$d\Theta^I = 0, \quad \triangle_h (f^{-1} X_I) = \frac{1}{6} \Theta^I \cdot \Theta^J,$$

- BMPV解: S^3ホライズンをもつ4パラメータ族（3電荷＋$J_\psi = J_\phi$）
  [Beckenridge, Myers, Peet & Vafa (1997)].
- 正則な超対称5Dブラックリング解, IIB D1-D5-P スーパーチューブ解:
  ($X_4 = E^4$) $S^2 \times S^1$ホライズンをもち、回転が$J_\phi \neq J_\psi$となる7パラメーター族（3電荷＋3磁気双極子モーメント＋リング径）. 5個の保存量以外に自由なパラメータを2個含む（連続的な一意性の破れ）
  [Elvang, Emparan, Mateos & Reall (hep-th/0408120)].
- 多重ブラックリング解、ブラックホール・ブラックリング系:
  空間的に$U(1)$不変性しか持たない解（Cf. Reall予想[Reall(2003)]）
  [Gauntlett & Gutowski (hep-th/0408010,0408122)].

$$ds^2(X_4) = H^{-1}(dx^4 + \chi)^2 + H ds^2(E^3) \text{ (Gibbons-Hawking base)}$$
$$\Rightarrow \quad \text{independen harmonic functions:} H, K^I, L_I, M.$$

- （3 M2ブレイン＋3 M5ブレイン）系に対応する11次元SUGRAの1/8–SUSY 3電荷BPS解の分類[Bena & Warner (hep-th/0408106)]
  $\Rightarrow$ 連続関数の自由度をもつブラックスーパーチューブ・ブラックホール族.
  Cf. Horowitz & Reall (hep-th/0411268).

超対称解は安定か？

- IIB SUGRAのconifoldコンパクト化(1/2 SUSY):

$$ds^2 = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} ds^2(CY_6),$$
$$F_5 = (1 + *) d(h^{-1}) \wedge d\Omega(E^{3,1}),$$
$$C_0 = C_2 = B_2 = \Phi = 0,$$
$$\triangle_{\mathrm{CY}} h = 0.$$

- Dynamical solution: [Gibbons, Lü & Pope (hep-th/0501117)]

$$h = h_0(y) \Rightarrow \qquad h = h_0(y) + at + b.$$

  – この解は，モジュライセクターが超対称性を破る摂動に対して不安定であることを意味する．ただし，radion以外のセクターは安定．
  – 3形式フラックスを導入したfractional D3ブレイン解でも同様の不安定性が存在する．
  $\Rightarrow$ 超対称ブラックホール解は(超対称性を破る摂動に対して）安定か？

今後の課題

高次元ブラックホールの分類

- 超対称ブラックホール解の分類

  $\Rightarrow$ 高次元超重力理論の超対称解の分類

  – 4次元極小（および拡張された）超重力理論での1/4-SUSY解の分類
  [Tod (1983, 1995), Caldarelli & Klemm (2003)].

  – 5次元および6次元極小超重力理論($+U(1)^N$ゲージ場) での(1/8-)SUSY解の分類[Gauntlett et al (2003), Gauntlett & Gutowski (2003)].

  – 11次元超重力理論でのfull & 1/32-SUSY解の分類
  (SU(5)または($Spin(7) \ltimes \mathbb{R}^8) \times \mathbb{R}$構造)
  [Gauntlett & Pakis (2003), Gauntlett, Gutowski & Pakis (2003)].

  – 10次元IIB理論でのfull & 1/32-SUSY解の分類
  (常に$V \cdot V = 0$で，$Spin(7) \ltimes \mathbb{R}^8$, SU(4) $\ltimes \mathbb{R}^8$ or G_2構造)
  [Gran, Gutowski & Papadopoulos (hep-th/0501177)].

- ホライズンの位相や時空の対称性に関して，超対称解は代表的か？

- 超対称性を破る摂動やパラメータの拡張に対して安定か？

ダイナミクスと量子重力

- 量子重力において，ブラックホールは存在するか？

  Cf. information paradox, Mathur予想

- 定常ブラックホールの内部では，必ず超対称性が破れる．

  $\Rightarrow$ 　超対称理論はブラックホールの量子論を真に記述できるか？

- ブラックホールの形成過程や蒸発をブレインで記述可能？

- 低エネルギー時空の４次元性の起源は？
- フラックスコンパクト化は（高次元理論として）安定か？
- 宇宙において（非有界な）ブレインの形成は可能か？
  広がりの有界なブレインしかできないとき何が起きるか？
- 宇宙創生時の状態は超対称か？
- 超対称性の破れた時空（やコヒーレンスを持たない物質が存在する場合）のダイナミクスをどのようにして決定するのか？