

Semiclassical Strings and Long Operators in AdS/CFT Correspondence

吉田 健太郎 (KEK)

Ref. hep-th/0410139, hep-th/0503XXX.

In collaboration with

壽崎 義明 氏(筑波大, KEK), 高山 靖敏 氏(総研大, KEK)



Introduction

AdS/CFT 対応

[Maldacena]

Type IIB on $AdS_5 \times S^5 \iff \mathcal{N}=4 \text{ SYM}_4$ (large N)



{	弦の状態	\iff	複合演算子
	エネルギー	$E = \Delta$	scaling 次元

AdS/CFT 対応の検証

1997~ BPS sector (SUGRA level)

[Maldacena] [Witten]

[Gubser-Klebanov-Polyakov]

2002 ~ Near-BPS sector (pp-wave string)

[Berenstein-Maldacena-Nastase]

2002 (2003) ~ **Far-from-BPS** sector

[Gubser-Klebanov-Polyakov]

[Frolov-Tseytlin]

non-BPS regionのある特別な領域

(BMNの解析の一般化)

エネルギーとscaling次元

$$(E = \Delta)$$

素朴な摂動展開を考えてみると、

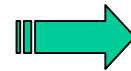
(planar sector)

$$E = \sum \frac{c_n}{(\sqrt{\lambda})^n} \text{ (負冪)} , \quad \Delta = \sum a_n \lambda^n \text{ (正冪)}$$

$$\uparrow \Delta = \sum a_n \lambda^n \leftarrow R^4 / \alpha'^2 = N g_{\text{YM}}^2 \equiv \lambda \text{ ('t Hooft coupling)}$$

同じ関数の二つの異なる漸近形

BPS sector以外での比較は困難



SUGRA level

(no stringy corrections)

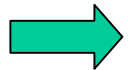
BPS sectorを超えて解析するにはどうしたらよいか？

Beyond BPS analysis

[Berenstein-Maldacena-Nastase]

[Gubser-Klebanov-Polyakov, Frolov-Tseytlin]

S^5 上の大きなスピン J を持つ弦の状態を考える。



Large spin limits of AdS/CFT

弦理論側でも、 λ について正冪展開が得られる。

$$E = J \left[1 + c_1 \frac{\lambda}{J^2} + c_2 \frac{\lambda^2}{J^4} + \dots \right]$$

BMN limit

New effective coupling: $\lambda' \equiv \lambda/J^2$ (fixed) in $J, N \rightarrow \infty$

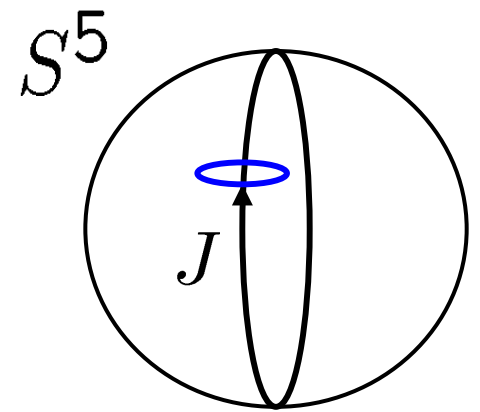
(通常のlarge N ゲージ理論と異なるダブルスケーリング極限)

SYM理論側における摂動計算と各係数ごとに比較できる。

EX. 1 PP-wave string (near-BPS) [BMN]

Penrose limit: AdS \longrightarrow PP-wave

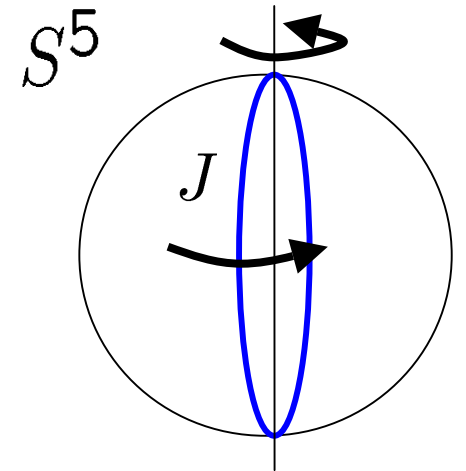
String as **a nearly point-like object**
(c.f. point-like in the supergravity analysis)



EX. 2 Semiclassical spinning string (non-BPS) [GKP, FT]

非常に大きな弦の古典解を考え、
その周りでの半古典近似を考える。

エネルギーの正冪の摂動展開を与える、回転する
弦の古典解は他にも様々なものが知られている。



Circular string

Plan of the Talk

- **Introduction** ✓
- **Review of AdS/CFT duality in a certain non-BPS region**
 - **String sigma model, spinning string (string side)**
 - **Spin chain Hamiltonian (SYM side)**
- **Open string and AdS/CFT duality in a non-BPS region**
[our work]
- **Summary and Outlook**

String sigma model

以下の議論では、閉じた弦を考える

The action of superstring on $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ [Metsaev-Tseytlin]

↓ **Boson部分** (in conformal gauge)

$$I = \sqrt{\lambda} \int d\tau \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} (L_{\text{AdS}} + L_{\text{S}}), \quad \sqrt{\lambda} = \frac{R^2}{\alpha'}$$
$$L_{\text{AdS}} = -\frac{1}{2} \eta^{PQ} \partial_a Y_P \partial^a Y_Q + \frac{1}{2} \tilde{\Lambda} (\eta^{PQ} Y_P Y_Q + 1)$$
$$L_{\text{S}} = -\frac{1}{2} \partial_a X_M \partial^a X_M + \frac{1}{2} \Lambda (X_M X_M - 1)$$

$$\eta_{PQ} = (-1, +1, +1, +1, +1, -1) \quad \Lambda, \tilde{\Lambda} : \text{Lagrange multipliers}$$

注) conformal gauge constraints \rightarrow AdS_5 部分と S^5 部分はcouple

$$\eta^{PQ} (\dot{Y}_P \dot{Y}_Q + Y'_P Y'_Q) + \dot{X}_M \dot{X}_M + X'_M X'_M = 0,$$
$$\eta^{PQ} \dot{Y}_P Y'_Q + \dot{X}_M X'_M = 0$$

O(2,4) × O(6) 対称性の電荷

$$S_{PQ} = \sqrt{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} (Y_P \dot{Y}_Q - Y_Q \dot{Y}_P), \quad O(2,4) \text{ 対称性}$$

$$J_{MN} = \sqrt{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} (X_M \dot{X}_N - X_N \dot{X}_M), \quad O(6) \text{ 対称性}$$

以下、次の座標系で考える。

Global coordinates

$$(ds^2)_{\text{AdS}_5} = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi_1^2 + \sin^2 \theta d\phi_2^2)$$

$$(ds^2)_{S^5} = d\gamma^2 + \cos^2 \gamma d\varphi_3^2 + \sin^2 \gamma (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi_1^2 + \sin^2 \psi d\varphi_2^2)$$

座標変換：（複素に組む）

$$Y_5 + iY_0 = \cosh \rho e^{it},$$

$$X_1 + iX_2 = \sin \gamma \cos \psi e^{i\varphi_1},$$

$$Y_1 + iY_2 = \sinh \rho \sin \theta e^{i\phi_1},$$

$$X_3 + iX_4 = \sin \gamma \sin \psi e^{i\varphi_2}$$

$$Y_3 + iY_4 = \sinh \rho \cos \theta e^{i\phi_2},$$

$$X_5 + iX_6 = \cos \gamma e^{i\varphi_3},$$

6個のCartan生成子: $(E, S_1, S_2; J_1, J_2, J_3)$

$$S_0 \equiv S_{50} \equiv E, \quad S_1 \equiv S_{12}, \quad S_2 \equiv S_{34},$$

$$J_1 \equiv J_{12}, \quad J_2 \equiv J_{34}, \quad J_3 \equiv J_{56}$$

$(E, S_1, S_2; J_1, J_2, J_3)$ を持った解 \longrightarrow **“Spinning”** string 解

(non-Cartan生成子に対するスピンはゼロ)

EX. two-spin solution

e.g. (J_1, J_2) in SU(2) sector

Circular string sol.

Folded string sol.

(S_1, J_1) in SL(2) sector

Spinning string 解のエネルギー:

$$E = J \left(1 + c_1 \frac{\lambda}{J^2} + c_2 \frac{\lambda^2}{J^4} + \dots \right), \quad J = \sum_{i=1}^3 J_i$$

S_i のみだとlog因子が現れる **[GKP,FT]**

SYM側との対応

Spinning string 解 \longleftrightarrow 確定次元を持つ複合演算子 (SYM)

対応する複合演算子: $\text{Tr} \left(D_{1+i_2}^{S_1} D_{3+i_4}^{S_2} \Phi_1^{J_1} \Phi_2^{J_2} \Phi_3^{J_3} \dots \right) + \dots$

複合演算子の異常次元行列 = 可積分なスピン鎖モデルのハミルトニアン

\longrightarrow 異常次元行列の対角化 (Bethe仮説法) [Minahan-Zarembo]

演算子混合: SU(2) sector (**full loop** closed),
SO(6) sector (**1-loop** closed), etc.

[Beisert-Kristjansen-Staudacher]

Scaling次元

J : 考えている複合演算子の長さ (裸のscaling次元)

$$\Delta(\lambda, J) = J + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(J) \lambda^k, \quad q_k(J) = \frac{1}{J^{2k-1}} \left(a_k + \frac{a_{k1}}{J} + \dots \right)$$

Long operator limit ($J \gg 1$)

String sigma model のループ補正の寄与を加えたエネルギーの表式:

$$E_{\text{tot}}(\lambda, J) = J \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{J^2} \right)^k \left(c_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{nk}}{J^n} \right) \right] \quad (\text{spinning string解})$$

SYMで計算した異常次元: (対応する複合演算子)

$$\Delta(\lambda, J) = J \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{J^2} \right)^k \left(a_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kn}}{J^n} \right) \right]$$

弦理論とSYMの係数の比較 ex. **SU(2) sector** (現在までの結果)

[Beisert-Frolov-Staudacher-Tseytlin]

$c_1 = a_1, c_2 = a_2$: 一致 \longrightarrow 1-loop, 2-loop O.K.

$c_3 \neq a_3$: 合わない \longrightarrow **3-loop discrepancy**

量子補正については、 d_{11} でさえ合わない。

A scheme for the large spin limit of AdS/CFT

回転する弦の古典解のエネルギー (large spin limit)



比較可能

複合演算子の異常次元 (long operator limit)



異常次元行列の対角化

Bethe 仮説法



可解スピン鎖模型のハミルトニアン

Open String in the Large Spin Limit of AdS/CFT

AdS₅ × S⁵背景中に AdS₄ × S²ブレインを挿入し、その上の開いた弦を調べる。

↑
└── AdS × Sの形に沿って挿入されたD5-ブレイン

動機:

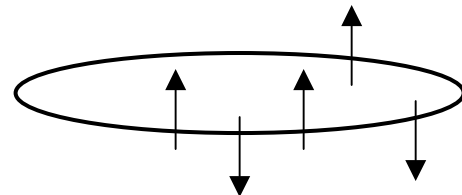
AdS-ブレインと可解スピン鎖模型との関係 i.e. **D-ブレイン** と **可積分性**

Closed vs. Open

└── 閉じた弦の周期性

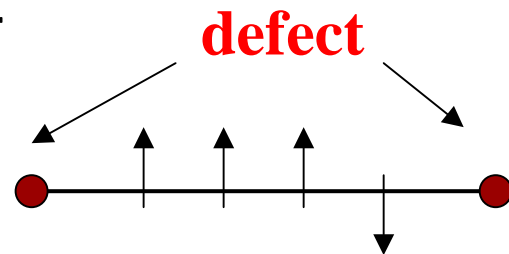
閉じた弦の状態: single trace 複合演算子

$\text{Tr}(\phi_1 \phi_2 \cdots)$ → 閉じたスピン鎖



開いた弦の状態: 端に defect fields を持つ複合演算子

$\bar{q} \phi_1 \phi_2 \cdots q$ → 開いたスピン鎖



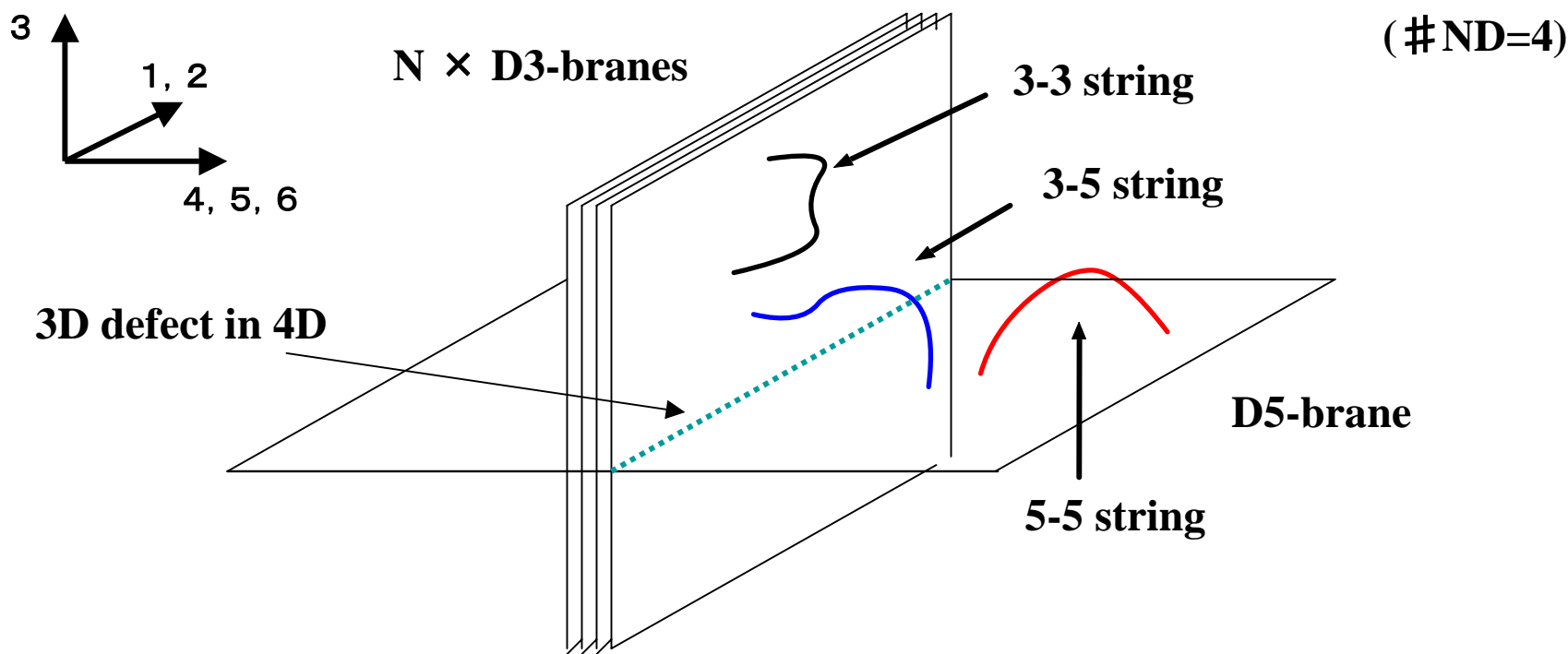
Our setup

Brane setup
[Karch-Randall]

Construction of dCFT
[DeWolfe-Freedman-Ooguri]

$\text{AdS}_4 \times \text{S}^2$ -brane is inserted in the bulk $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$

↑ Near-horizon limit



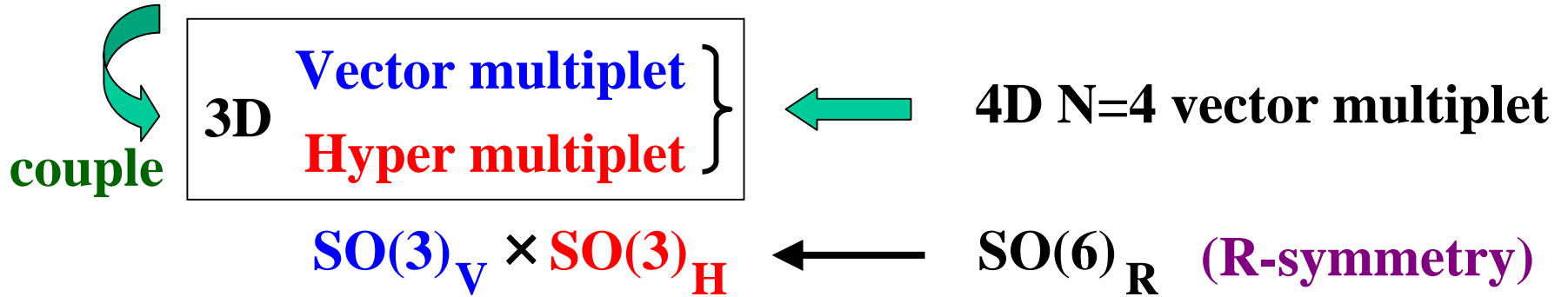
3-3 string \rightarrow 4D $\mathcal{N}=4$ SYM \leftarrow couple

3-5 string \rightarrow Defect fields \rightarrow 3D defect CFT (q_m, Ψ^a)

5-5 string \rightarrow Open strings ending on the AdS-brane

Field contents of the defect CFT

3D fundamental fields: (q_m, Ψ^a) ← 3-5 string



The action

The action of N=4 SYM

$$S_{\text{tot}} = S_{\mathcal{N}=4} + S_{\text{dCFT}}$$

$$S_{\text{dCFT}} = \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \int d^3x \left[(D^k q^m)^\dagger D_k q^m - i\bar{\Psi}^a \rho^k D_k \Psi^a + i\bar{\Psi}^a P_+ \lambda_{am} q^m \right. \\ \left. - i\bar{q} \lambda_{ma} P_+ \Psi^a + \bar{\Psi}^a \sigma_{ab}^A X_V^A \Psi^a + \bar{q}^m X_V^A X_V^A q^m + \bar{q}^m \sigma_{mn}^I (D_3 X_H^I) q^n \right. \\ \left. + i\epsilon_{IJK} \bar{q}^m \sigma_{mn}^I X_H^J X_H^K q^n + \frac{1}{4} \delta(0) \text{Tr}(\bar{q}^m \sigma_{mn}^I q^n)^2 \right]$$

Defect演算子に対する1-loop異常次元行列

[DeWolfe-Mann]

SO(6) スカラー場のみを含むdefect複合演算子の1-loop異常次元行列

defect 複合演算子 q, \bar{q} : defect スカラー場 X^i : SO(6) スカラー場

$$\mathcal{O} = C_{m, i_1 \dots i_L, n} \bar{q}_m X^{i_1} \dots X^{i_L} q_n \quad (L = J)$$

異常次元行列 = 開いた可解スピン鎖のハミルトニアン

= SO(6) 可解スピン鎖 + 可積分性を保持する境界

D-ブレーンの存在により境界が現れるが、可積分性は保たれる。

一方、境界によりSO(6)対称性が破れる: $SO(6) \rightarrow SO(3)_H \times SO(3)_V$

$$\text{AdS}_4 \times \text{S}^2 \subset \text{AdS}_5 \times \text{S}^5$$

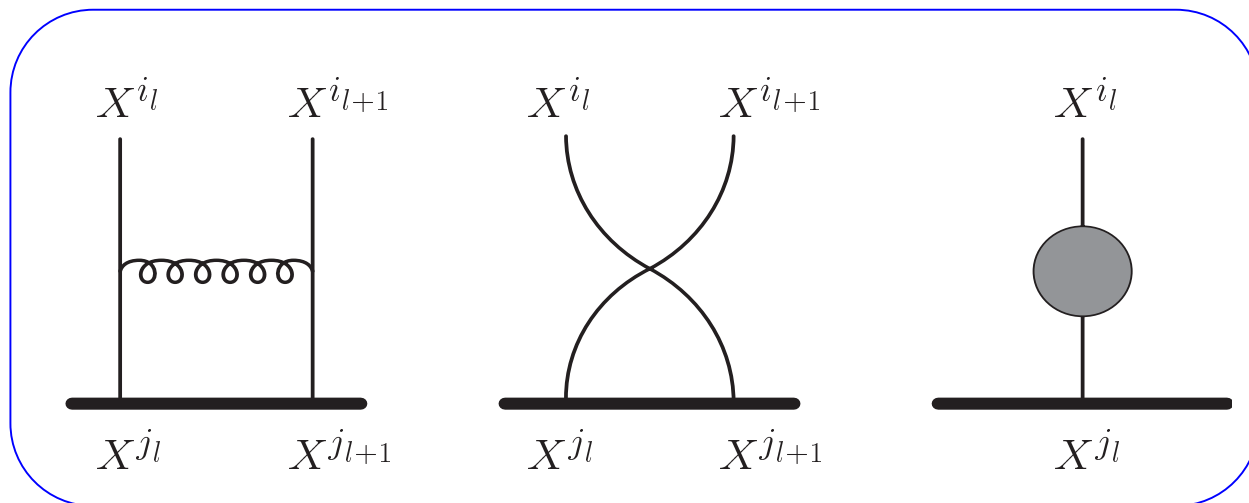
(D-ブレーン) \swarrow $SO(3)_H$ で不変

1-loop 異常次元行列の計算に寄与するダイアグラム:

Bulk 相互作用:

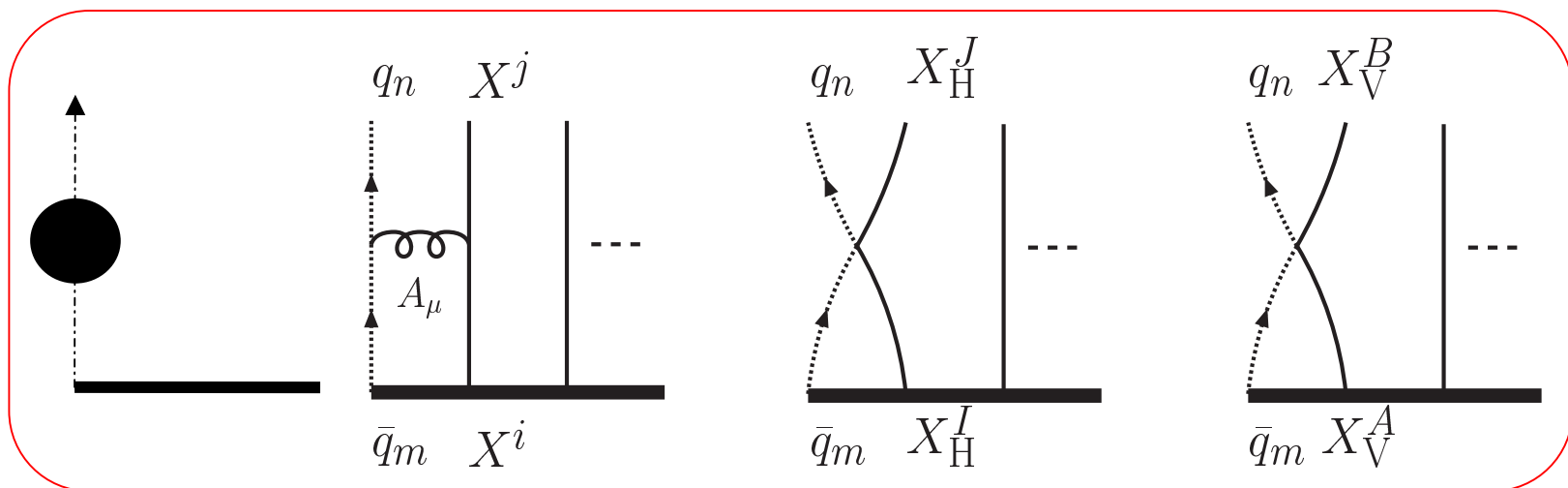
1-loop \rightarrow 最近接相互作用

[Minahan-Zarembo]



Defect 相互作用:

$$X^i = (X_H^I, X_V^A), \quad I = 1, 2, 3 \quad A = 1, 2, 3$$



異常次元行列 (1-loop) = 可積分な開いたスピン鎖模型

$$\Gamma_{\mathcal{O}} = \Gamma_{\mathcal{O}}^{\text{bulk}} + \Gamma_{\mathcal{O}}^{\text{defect}}$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda}{16\pi^2} \sum_{l=1}^{L-1} H_{l,l+1}}_{\text{Bulkの寄与}} + \underbrace{\frac{\lambda}{16\pi^2} \left[(2 + 2\bar{S}_{\bar{q}1}) + (2 + 2S_{Lq}) \right]}_{\text{defectの寄与}}$$

$$H_{l,l+1} = K_{l,l+1} + 2I_{l,l+1} - 2P_{l,l+1} \quad \begin{array}{l} K : \text{trace} \\ P : \text{permutation} \end{array}$$

$$\bar{S}_{\bar{n}J}^{\bar{m}I} = i\epsilon_{IJK}\sigma_{\bar{m}\bar{n}}^K \quad S_{Jn}^{Im} = -i\epsilon_{IJK}\sigma_{mn}^K$$

$$I, J, K : 3 \text{ of } SO(3)_{\text{H}} \quad m, n : 2 \text{ of } SU(2)_{\text{H}}$$

- 問題:**
- 対角化をするときに境界項をどう取り扱うか？
 - defect演算子に対応するspinning string解はなにか？

固有値(エネルギー)で比較する以外に、

作用レベルで対応関係のチェックができる [Kruczenski]



利点 スtringの解を特定する必要がない。

作用レベルでの比較

[Kruczenski-Tseytlin]

SYM: コヒーレント状態を用いてスピン鎖模型の期待値をとる。
(1D lattice)

連続極限

速い変数を取り除く

Landau-Lifshitz 型シグマ模型

String: 速い変数を分離して、弦のシグマ模型の作用を書き直す。

✚ コヒーレント状態の構成とシグマ模型の導出

開スピン鎖模型の端点をどう扱うか？ i.e. 開弦のコヒーレント状態の構成

Our ansatz for coherent states:

[Susaki-Takayama-K.Y.]

$$|\text{coh}\rangle = |\bar{q}\rangle \otimes \prod_{l=1}^L \otimes |m_l\rangle \otimes |q\rangle$$

$|m_l\rangle$: $\text{SO}(3)_H$ コヒーレント状態, $|q\rangle, |\bar{q}\rangle$: $\text{SU}(2)$ コヒーレント状態

i.e. D-ブレーン上に伸びている開弦を考える。

境界項の評価

$$\langle \text{coh} | \Gamma_{\mathcal{O}}^{\text{defect}} | \text{coh} \rangle = \lambda \left\{ a_0 + a_1 \frac{1}{L} + a_2 \left(\frac{1}{L} \right)^2 + O \left(\frac{1}{L^3} \right) \right\}$$

BMN scalingを破らない条件: $a_0 = a_1 = 0$

SO(3)_H コヒーレント状態

$$\theta_{l+1} \cong \theta_l + O(1/L), \quad \phi_{l+1} \cong \phi_l + O(1/L)$$

$$|m_l\rangle = \frac{SO(3)_H}{SO(2)} = \frac{e^{-i\phi_l}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \theta_l \cos \phi_l + i \sin \phi_l \\ -\cos \theta_l \sin \phi_l + i \cos \phi_l \\ \sin \theta_l \end{bmatrix}$$

SU(2) コヒーレント状態

$$|\bar{q}\rangle = |q\rangle^* = \frac{SU(2)_H}{U(1)} = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

$a_0 = a_1 = 0 \rightarrow$ 端のコヒーレント状態を調節する必要がある。

$(\vartheta_{\bar{q}}, \varphi_{\bar{q}})$ と (θ_1, ϕ_1) 、 (ϑ_q, φ_q) と (θ_L, ϕ_L) の関係

Left

$$\begin{cases} \vartheta_{\bar{q}} = \theta_1 + \frac{1}{L}\delta\theta_1 + \frac{1}{L^2}\Delta\theta_1 \\ \varphi_{\bar{q}} = \pi - \phi_1 - \frac{1}{L}\delta\phi_1 - \frac{1}{L^2}\Delta\phi_1 \end{cases}$$

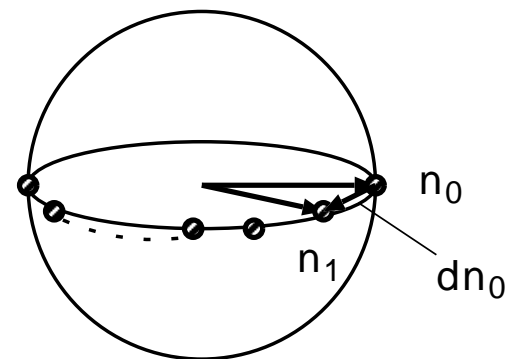
Right

$$\begin{cases} \vartheta_q = \pi + \theta_L + \frac{1}{L}\delta\theta_L + \frac{1}{L^2}\Delta\theta_L \\ \varphi_q = \pi - \phi_L - \frac{1}{L}\delta\phi_L - \frac{1}{L^2}\Delta\phi_L \end{cases}$$

幾何学的な解釈

$\vec{n}_0 \equiv \langle \bar{q} | \sigma^K | \bar{q} \rangle$: 弦の端点を表す位置ベクトル

$\vec{n}_1 \equiv_I \langle m_1 | [-i\epsilon_{IJK}] | m_1 \rangle_J$: 端点の隣



$$\Gamma_{\mathcal{O}}^{\text{defect}} \sim \delta_{\vec{n}}^{\bar{m}} \delta_J^I + i\epsilon_{IJK} \sigma_{\bar{m}\bar{n}}^K$$

→ $0 = 1 - \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_1 \cong \vec{n}_0 \cdot d\vec{n}_0$ (1/Lの一次)
(1/Lのゼロ次)

1/Lの二次の寄与は残るが、シグマ模型の作用に吸収される。


$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} | \Gamma^{\text{defect}} | \mathcal{L} \rangle &= \frac{\lambda}{8\pi^2} \times \frac{1}{2L^2} \left\{ (\delta\theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 (\delta\phi_1)^2 \right\} + O\left(\frac{1}{L^3}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\tilde{\lambda}}{2} \left\{ |\delta m_1|^2 - |m_1^* \cdot \delta m_1|^2 \right\} + O\left(\frac{1}{L^3}\right) \end{aligned}$$

Note:

1/Lの三次以上の項は、 $L \rightarrow \infty$ で消える。(1-loopの解析では無視できる)

連続極限:

$$\langle \text{coh} | H | \text{coh} \rangle = \sum_{l=1}^{L-1} \langle \text{coh} | H_{l,l+1} | \text{coh} \rangle + \langle \text{coh} | H_{\text{defect}} | \text{coh} \rangle$$

$L \rightarrow \infty$


$$L \int_0^\pi \frac{d\sigma}{\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{4L^2} \sum_{I=1}^3 \{ |\partial_\sigma m^I|^2 - |m^{J*} \partial_\sigma m^J|^2 \} \right]$$

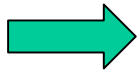


**Phase-space
Lagrangian**

$$S = L \int dt \int_0^\pi \frac{d\sigma}{\pi} \left[-im^{I*} \partial_t m^I - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{4L^2} |D_\sigma m^I|^2 \right]$$

SO(3)_H Landau-Lifshitz 型 シグマ模型

一方、同じシグマ模型が弦理論側からも導出される。



作用レベルでの対応が1-loopで成り立つ

(for our ansatz)

2-loopでも対応が成り立つ。

Y. Susaki, Y. Takayama, K.Y., in preparation.

$SO(3)_H$ open pulsating string 解

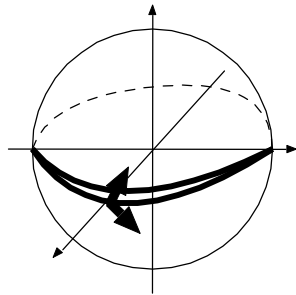
m^I を極座標表示すると、 $\mathcal{L} = \cos \theta \dot{\phi} - \frac{\tilde{\lambda}}{16} \left[\theta'^2 \sin^2 \theta \phi'^2 \right]$

解: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = m\sigma \quad \rightarrow \quad E_O = \frac{\lambda}{16L} m^2$

Doubling trick \rightarrow 閉弦の pulsating string 解のエネルギー [Minahan]

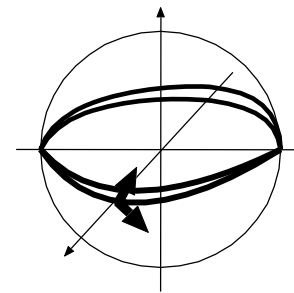
$$E_O(L) = \frac{1}{2} E_{\text{closed}}(2L), \quad E_{\text{closed}} = \frac{\lambda}{4L} m^2$$

S^2 -brane



Open

$S^2 \subset S^5$



Closed

Bethe方程式 \rightarrow この解に対応する Bethe root

D-ブレーンの存在 \rightarrow Riemann面上の Bethe roots に対する制限

他のコヒーレント状態 (or 弦の古典解) の可能性

e.g. D-ブレーンに端を持つが、ブレーンの外に広がっている弦

$$ds_{S^5}^2 = R^2 (\underbrace{d\psi^2 + \cos^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}_{S_H^2} + \underbrace{\sin^2 \psi (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\zeta^2)}_{S_V^2})$$

先に考えたのは $\psi = 0$ の S_H^2

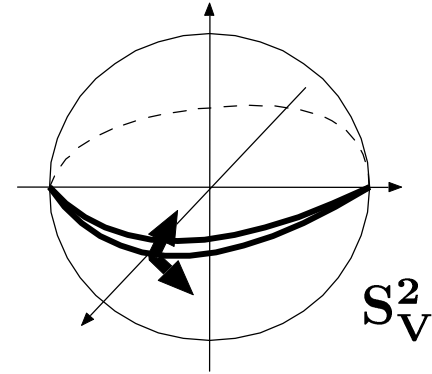
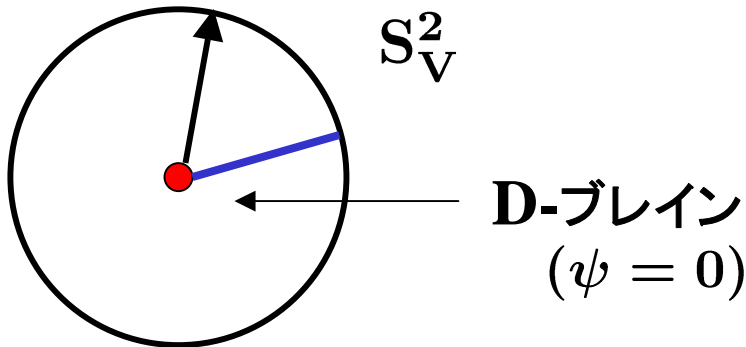
S_H^2

S_V^2

$SO(3)_H \times SO(3)_V$

他の可能性の例:

$$\psi = \sigma$$



しかし、弦のシグマ模型の解でない

S_V^2 上で振動する解はあるが、D-ブレーンに端を持ってない。

SL(2) sector (S, J) ? (E, S, J, \tilde{J})



Summary and Outlook

(non-BPS領域)

AdS-ブレイン上の開弦に対するAdS/CFT双対性を large spin limit で調べた。

SYM: Defect 複合演算子 \rightarrow 異常次元行列 = 可解な開いたスピン鎖

Landau-Lifshitz 型 シグマ模型



コヒーレント状態

String: シグマ模型の作用の書き換え \uparrow 速い変数を取り除く

\Rightarrow 作用レベルでの対応を1-loop レベルで確かめた。

(D-ブレインの中に伸びている開いた弦)

- Bethe方程式 or リーマン面から見たD-ブレインの解釈
- 他のsector, 高次ループ、他のAdS-ブレインへの拡張
- giant graviton上の開弦への応用

今後の展望:

AdS-stringの可積分性

非BPS領域 (large spin limit) でのAdS/CFT dualityの解析

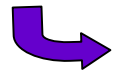
可積分スピン鎖模型が重要な役割を果たす



??

[Dolan-Nappi-Witten]

AdS上の弦理論(シグマ模型)の(古典)可積分性 [Bena-Polchinski-Roiban]



PSU(2,2|4) super Yangian 対称性

c.f. OSp(4|4) super Yangian? (AdS₄ × S² ブレインがある場合)

3-loop discrepancy or quantum fluctuations