

Anomaly Inflow in Brane Tilings

Based on

JHEP06(2006)011 ([hep-th/0605097](#))

and

JHEP12(2006)041 ([hep-th/0609163](#))

2006/12/26(Tue)

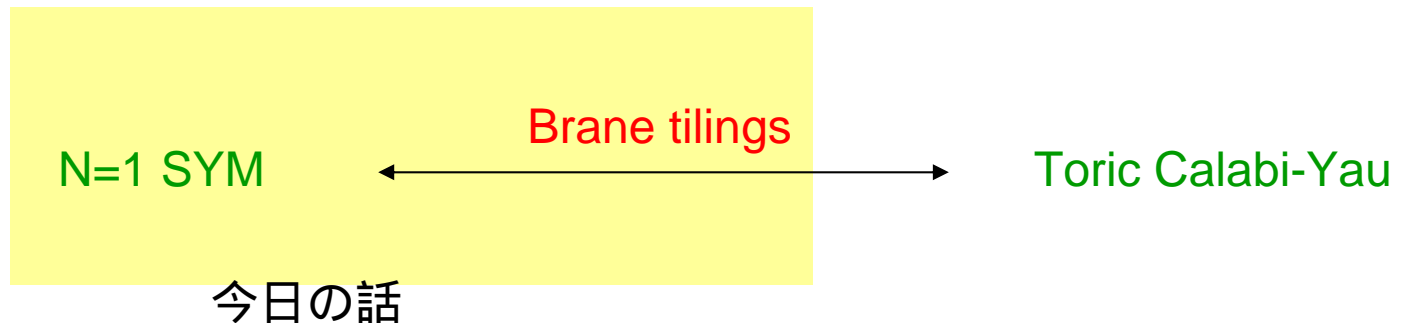
@立教大学 弦理論研究会

東京大学(本郷)
今村洋介

1. Introduction

Brane tiling (Hanany et al. ,2005) は ...

- N=1 quiver gauge theories をブレンを用いて実現する方法を与える。
- D5-NS5 系の構造を表す。
- toric Calabi-Yau と密接に関係している。

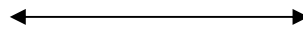


I'd like to talk

Gauge theory

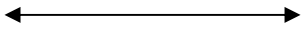
Brane tilings

Global symmetries



?

't Hooft anomalies



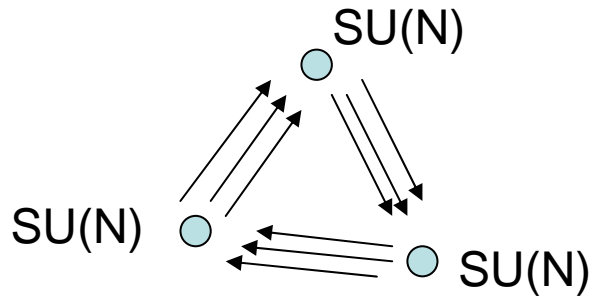
?

2. Brane tilings
3. Global symmetries
4. 't Hooft anomalies
5. Discussions

2. Brane tilings

N=1 quiver gauge theories

Quiver diagram

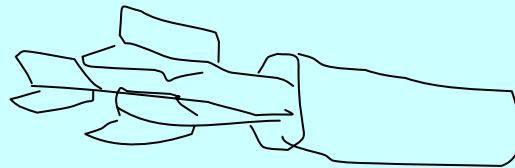


vertices = $SU(N)$ chiral multiplets
arrows = bi-fundamental chiral multiplets

Quiver:

**arrow case: a long narrow case for holding arrows*

**arrows: the arrows contained in a quiver*



Brane configuration

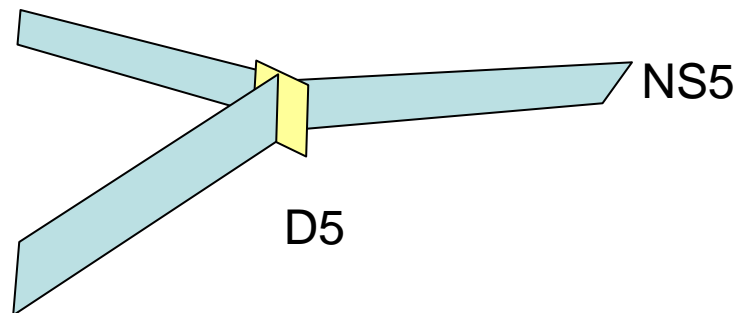
	0	1	2	3	4	Compact (T^2)		8	9
						5	6	7	
D5-branes	0	0	0	0		0		0	
NS5-branes	0	0	0	0	0	0			
	0	0	0	0			0	0	

89-rotation
= R-symmetry

This configuration preserves N=1 SUSY

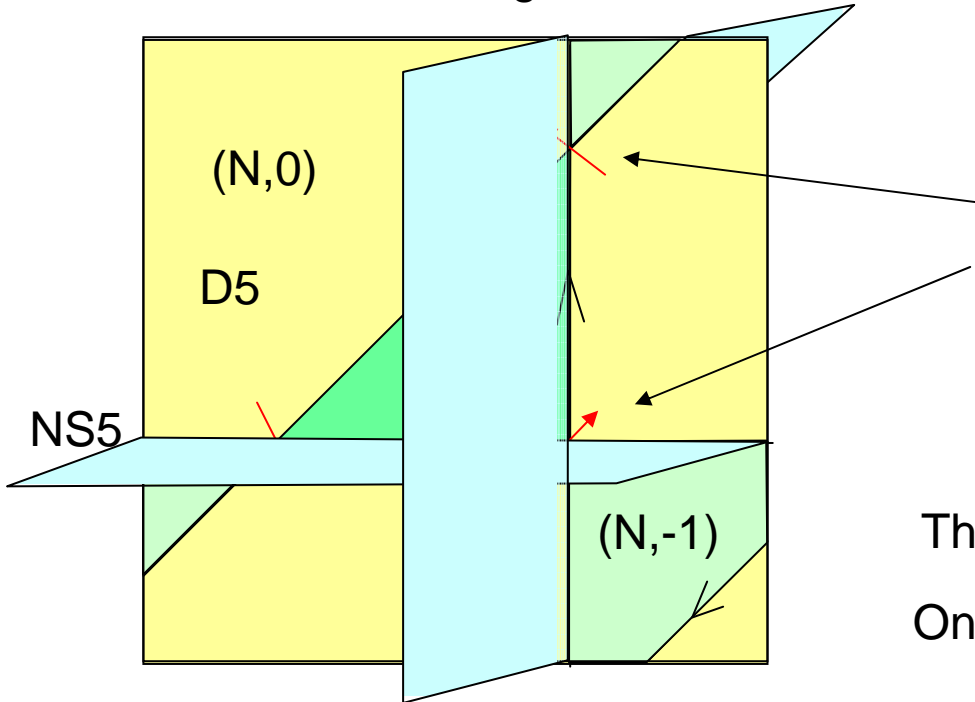
46 平面へ射影 (p,q) web

57 平面へ射影 brane tiling
(Feng et al. hep-th/0511287)



Simplest example

Brane tiling



SU(N) can live only on $(N,0)$

bi-fundamental chiral multiplets

This is the simplest (nontrivial) example
One SU(N) + three bi-funds. = N=4 SYM

(p,q) brane = bound state of p D5
and q NS5

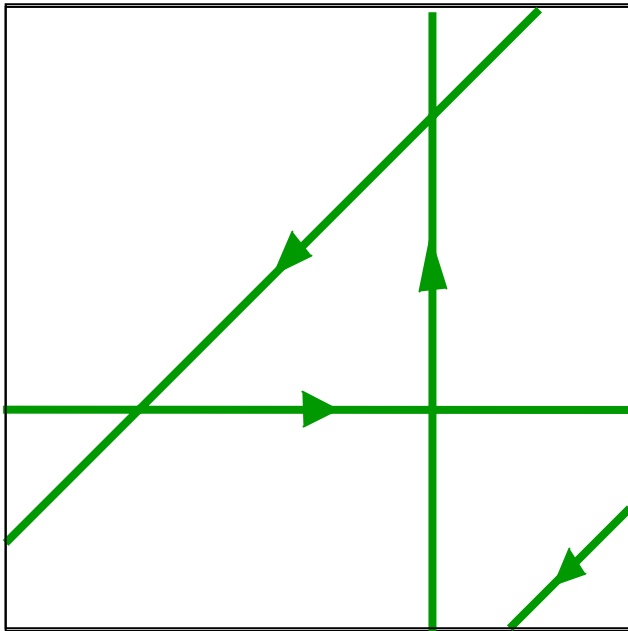
Numbers of vector and chiral multiplets

of gauge groups = # of $(N, 0)$ faces

of chiral multiplet = # of intersections

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} |\langle \mu, \nu \rangle|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \text{sign}(\mu, \nu) \langle \mu, \nu \rangle$$



μ, ν : cycles

$\langle \mu, \nu \rangle$: intersection number

$\text{sign}(\mu, \nu) \equiv \text{sign}(\langle \mu, \nu, \rangle)$

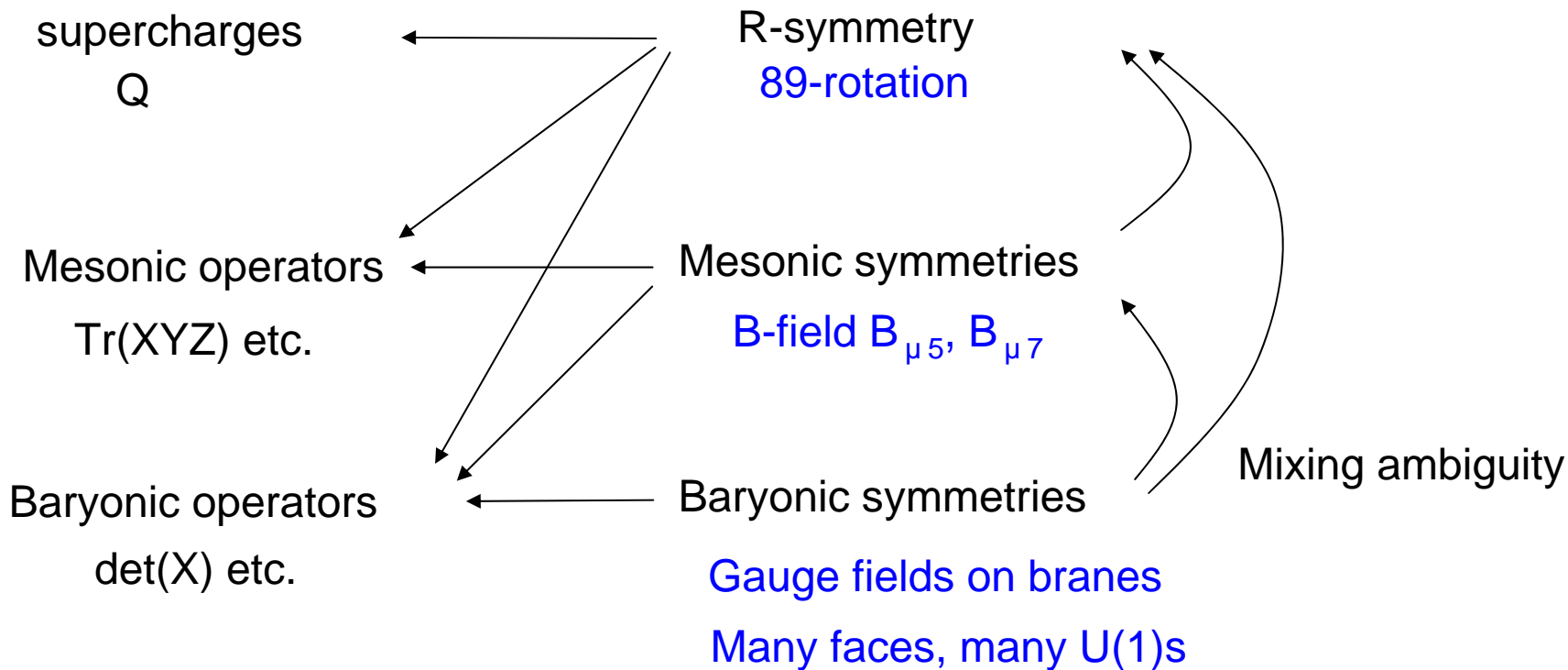
In this case, there are 3 cycles

3. Global symmetries

Global symmetries of N=1 quiver SQCD

Gauge inv. operators

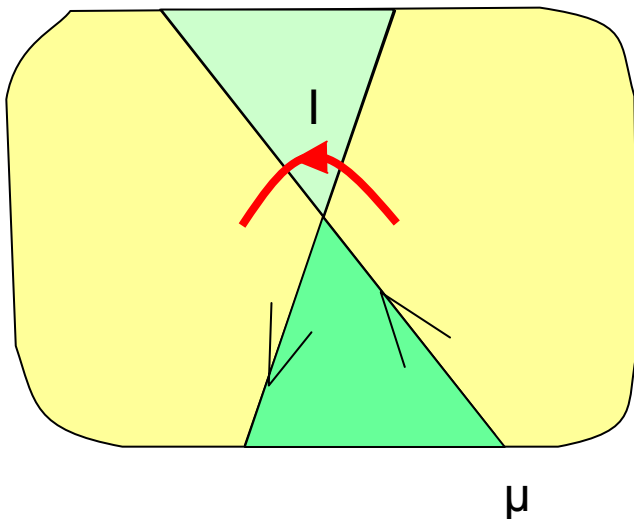
symmetries



Charge Assignments

Anomaly-free な flavor 対称性は次のルールで与えることができる。

(Butti & Zaffaroni)



$$Q_I = \text{sign}(\mu, \nu)(f_\mu - f_\nu) = \int_I \mathcal{Q}$$

ただし、次の 1-form を定義した。

$$\mathcal{Q} = \sum f_\mu \delta(\mu)$$

f_μ はサイクルごとに割り当てられる数

Mesonic sym と baryonic sym の違いは？

mesonic op との結合

Mesonic operators

Mesonic op. closed path ~ closed string

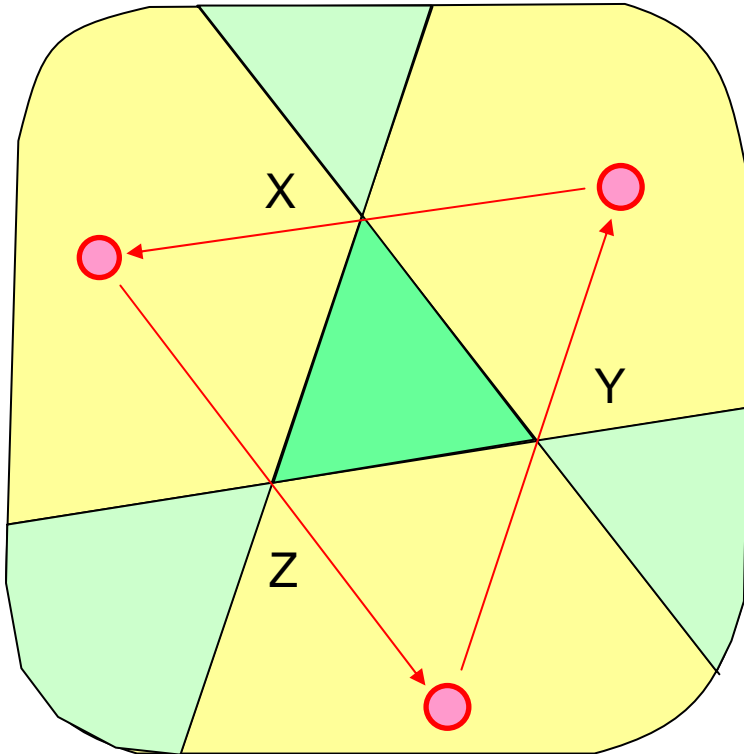
例えば: $P = \text{tr}(XYZ)$ 三角形

Mesonic operator の charge

$$Q(\text{tr}(XYZ)) = \oint_{\Delta} Q$$

Baryonic charge については常に 0

→ Q は exact



Mesonic charges

$$M_I = \text{sign}(\mu, \nu)(m_\mu - m_\nu)$$

Baryonic charges

ただし、 b_μ は次の条件を満たす

$$B_I = \text{sign}(\mu, \nu)(b_\mu - b_\nu)$$

$$\sum b_\mu \mu = 0$$

$Q = \sum b_\mu \delta(\mu)$ は exact なので、次のように書ける。

$$Q = dS$$

ただし、 S は次のように与えられる。

$$S = \sum_a S_a \delta(a) \quad S(a) \text{ は面 } a \text{ で } 1 \text{ になる関数}$$

これらの S_a や b_μ を用いると $U(1)$ に対応したゲージ場を与えることができる。

U(1)_B gauge fields

U(1)_B gauge fields in 4-dim

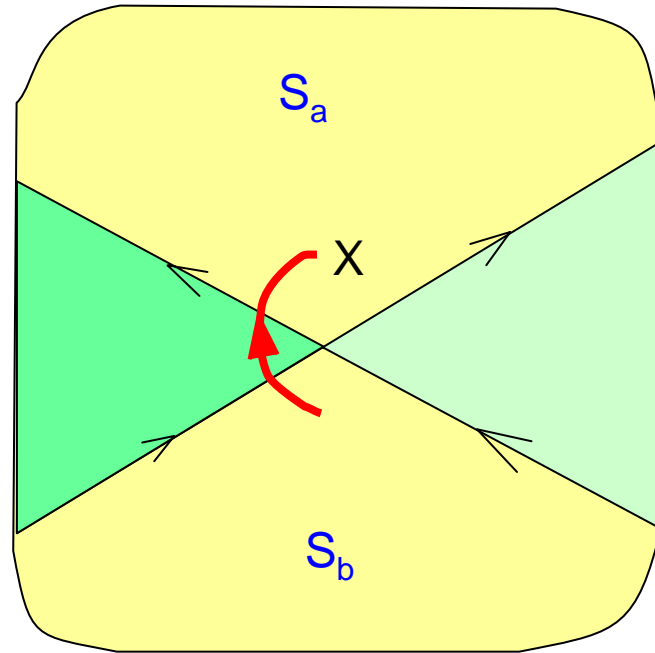


Gauge field on D5-brane a

$$V_a^{(D5)} = S_a V_B$$

Gauge fields on NS5-brane μ

$$V_\mu^{(NS5)} = N b_\mu V_B$$



the open string for X couples to

$$V_a - V_b = (S_a - S_b)V_B$$

Charges are given by

$$Q_X = S_a - S_b$$

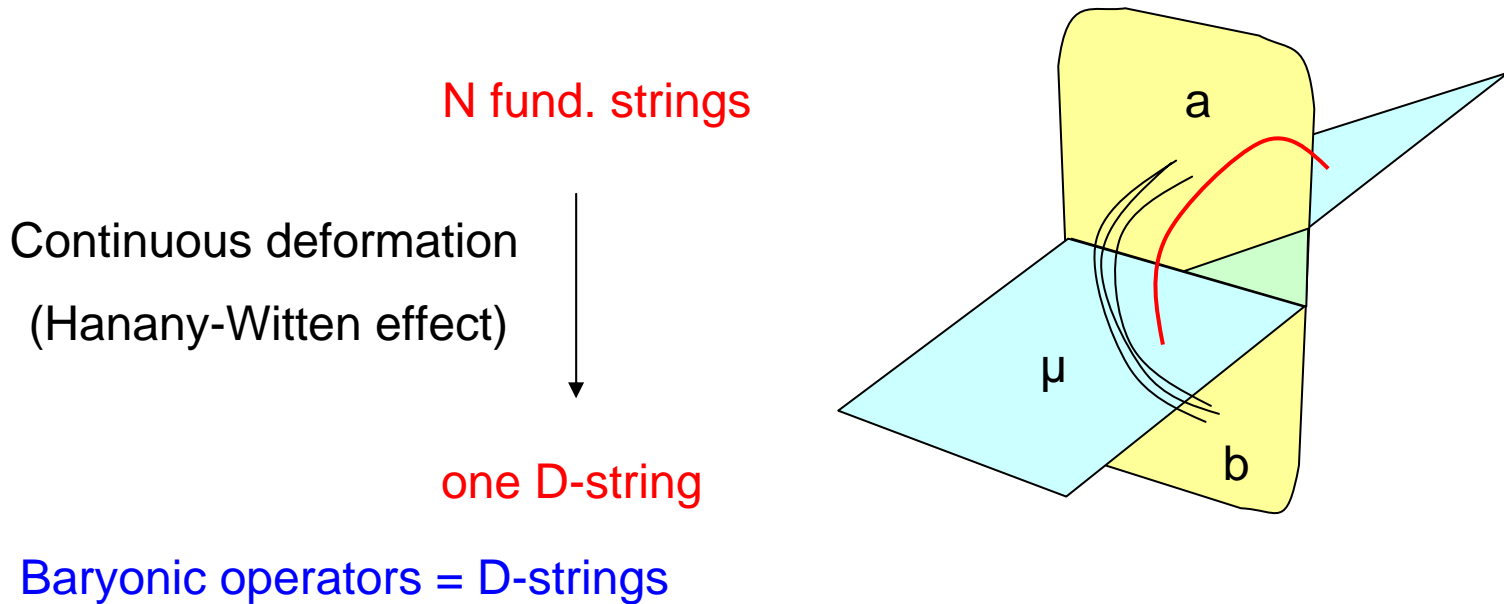
$$\Leftrightarrow Q = d\mathcal{S} \quad 14$$

Baryonic charge について

$$Q = dS$$

Charge を次のように二通りに書ける。

$$B_I = \text{sign}(a, b)(S_a - S_b) = \text{sign}(\mu, \nu)(b_\mu - b_\nu)$$



U(1)_M gauge fields

Mesonic charges = winding charges of closed strings

Gauge fields = B-field

$$B_2 = V_M \wedge \sum_{\mu} m_{\mu} \delta(\mu)$$

V_M : U(1)_M gauge field

m_{μ} : numbers assigned to NS5-branes

μ : index for NS5-branes or cycles on T²

R charges

R-symmetry is $U(1)$ rotation

Turning on the gauge field V_R



The metric is deformed

$$ds^2 = dr^2 + (d\theta + 2V_R)^2$$

How the coupling of V_R to matters arise?

Let us consider coupling to baryonic operators.

R charges of Baryonic operators

(= V_R -D1 coupling)

RR 3-form flux

$$G_3 = \frac{N}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi.$$

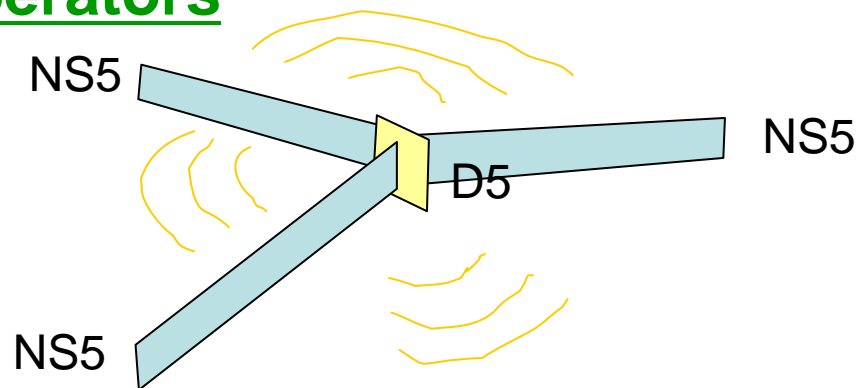
$$x^4 + ix^6 = r e^{i\phi} \cos \theta, \quad x^8 + ix^9 = r e^{i\psi} \sin \theta$$

Tuning on V_R $d\psi \rightarrow d\psi + 2V_R$

$$\delta G_3 = \frac{2N}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\phi \wedge V_R$$

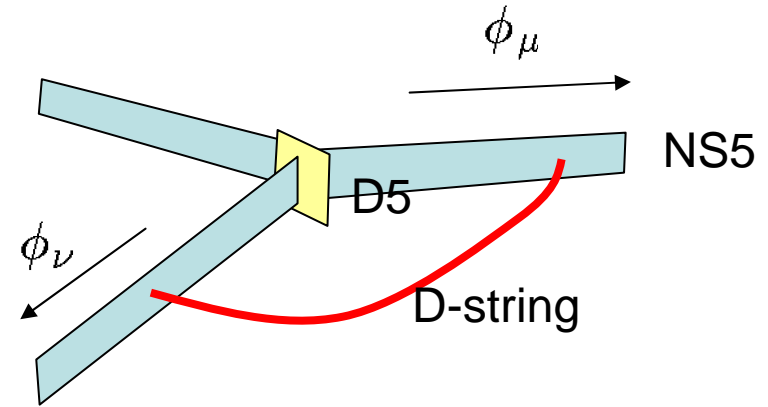
potential

$$C_2 = \frac{N}{\pi} \cos^2 \theta d\phi \wedge V_R$$



Coupling with baryonic operators
= coupling with D-strings

$$R = \pm \frac{N}{\pi} (\phi_\mu - \phi_\nu)$$



R-charges angles made by NS5-branes

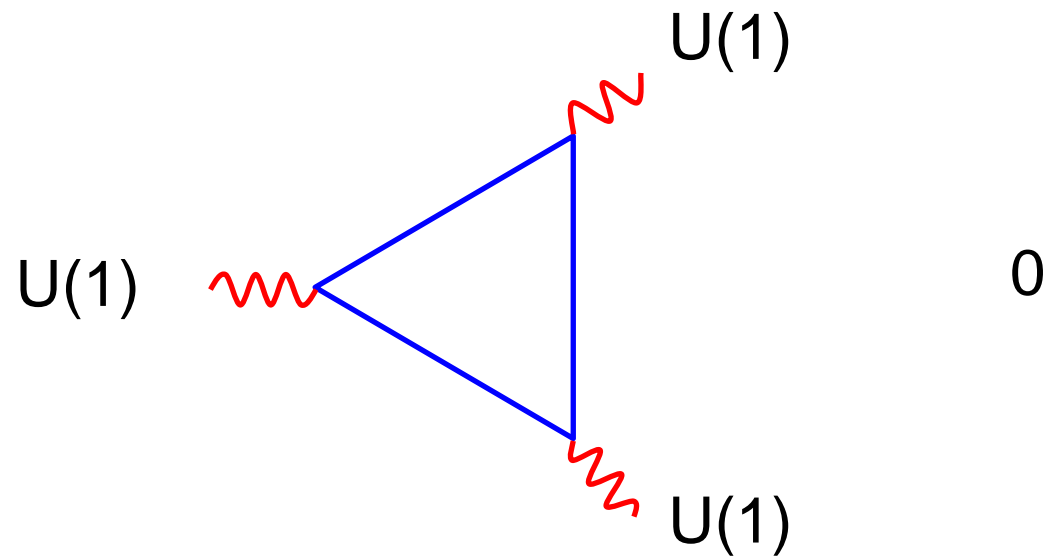
$$R_I = \frac{1}{\pi} \text{sign}(\mu, \nu) [[\phi_\mu - \phi_\nu]]$$

$$[[x]] = x \bmod 2\pi, \quad -\pi \leq [[x]] \leq \pi$$

Note: These are **not** R-charges in the superconformal algebra

These are R-charges of the **scalar** components

4. 't Hooft anomalies



Anomalies in string theory

Gauge theory

Gauge symmetries

Global symmetries

String theory

Gauge symmetries
in compact spaces

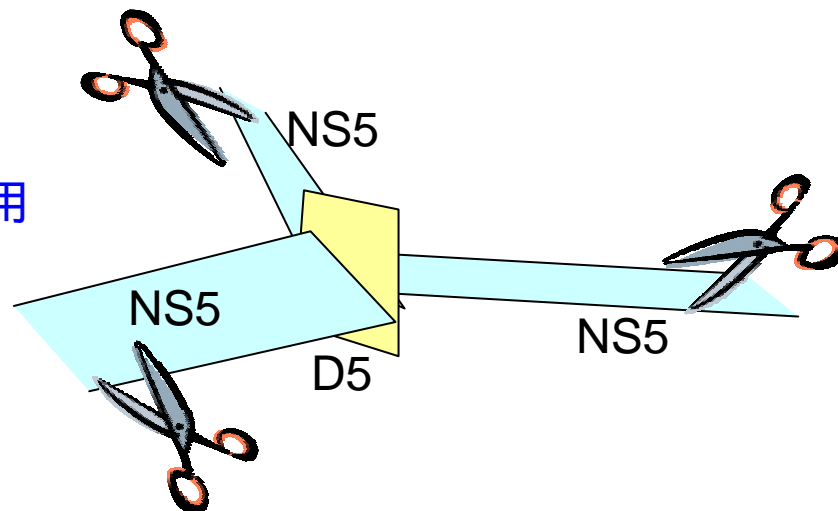
Gauge symmetries
In non-compact spaces

$$\mathcal{L} = \frac{V}{g_{\text{str}}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} g_{\text{eff}}^2 = \frac{g_{\text{str}}}{V} \rightarrow 0$$

ゲージ理論の有効作用 = ブレーンの作用

ブレーンが無限に伸びていると発散

Cut-off が必要



表面項としてアノマリーが現れる = anomaly inflow²¹

Ambiguity

ラグランジアンの表面項は運動方程式を変えない どうとでも取れる？

$$S_{\text{NS5}} = \frac{1}{8\pi^2} \int B_2 \wedge F_2 \wedge F_2 \quad S_{\text{NS5}} = \frac{1}{8\pi^2} \int H_3 \wedge A_1 \wedge F_2$$

どっちを用いるべき？

この任意性はゲージ理論のUV正則化の仕方の任意性に対応している。

ここでは

(Butti & Zaffaroni)

U(1)_B³アノマリーは常に消えることが知られているので、
U(1)_Bを保つような正則化、ブレーン作用を用いる。

Global symmetries and Gauge fields

$U(1)_B$ gauge fields

$$V_B^{(i)}$$

Gauge field on D5-brane a

$$V_a^{(D5)} = \sum_i S_a^{(i)} V_B^{(i)}$$

Gauge fields on NS5-brane μ

$$V_\mu^{(NS5)} = N \sum_i b_\mu^{(i)} V_B^{(i)}$$

$U(1)_M$ gauge fields

$$V_M$$

NS-NS field

$$B_2 = V_M \wedge \sum_\mu m_\mu \delta(\mu)$$

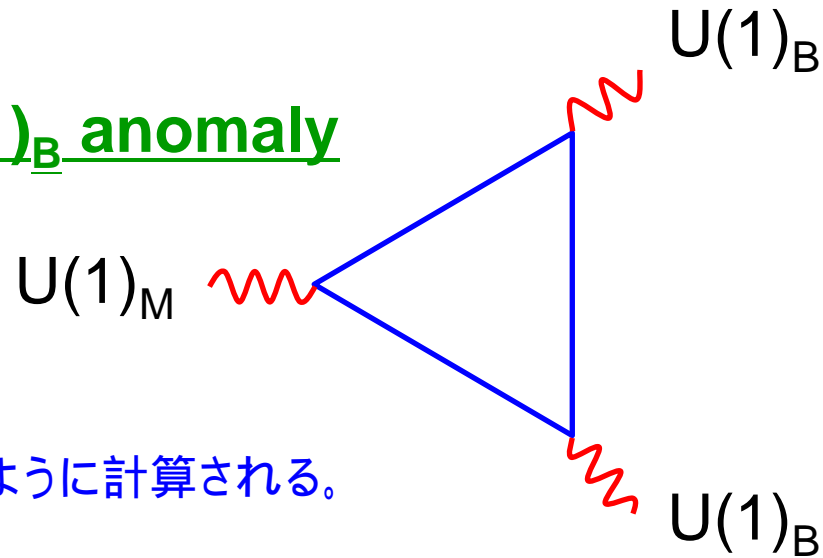
$U(1)_R$ gauge field

$$V_R$$

metric deformation

$$ds_{89}^2 = dr^2 + r^2 (d\theta + 2V_R)^2$$

U(1)_MU(1)_BU(1)_B anomaly



ゲージ理論側で次のように計算される。

$$\begin{aligned}\text{tr}(M B^i B^j) &= \sum_I M_I B_I^i B_I^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu \rangle (m_\mu - m_\nu) (b_\mu^i - b_\nu^i) (b_\mu^j - b_\nu^j) \\ &= \sum_{\mu, \nu} m_\mu \langle \mu, \nu \rangle b_\nu^i b_\nu^j\end{aligned}$$

$$\text{used } \sum_\mu \mu = \sum_\mu b_\mu \mu = 0$$

NS5-brane 作用

$$S = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\mu} \int B_2 \wedge F_2^{(\mu)} \wedge F_2^{(\mu)}$$

μ : index of NS5-branes

次の式を代入

$$V_{\mu}^{(\text{NS5})} = \sum_i b_{\mu}^{(i)} V_B^{(i)} \quad B_2 = V_M \wedge \sum_{\nu} m_{\nu} \delta(\nu)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{I,J} \sum_{\mu} b_{\mu}^{(i)} b_{\mu}^{(j)} \int_{\mu \times r \times \mathbf{R}^4} V_M \wedge \sum_{\nu} m_{\nu} \delta(\nu) \wedge F_2^{(i)} \wedge F_2^{(j)} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i,j} \sum_{\mu,\nu} b_{\mu}^{(i)} b_{\mu}^{(j)} \langle \mu, \nu \rangle m_{\nu} \int_{r \times \mathbf{R}^4} V_M \wedge F_2^{(i)} \wedge F_2^{(j)} \end{aligned}$$

$$\left(\int_{\mu} \delta(\nu) = \langle \mu, \nu \rangle \right)$$

$$S = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i,j} \sum_{\mu,\nu} b_\mu^{(i)} b_\mu^{(j)} \langle \mu, \nu \rangle m_\nu \int_{r \times \mathbf{R}^4} V_M \wedge F_2^{(i)} \wedge F_2^{(j)}$$

$U(1)_M$ ゲージ変換する。

$$\delta V_M = d\alpha_M$$

すると、次の表面項が現れる。

$$S = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i,j} \sum_{\mu,\nu} b_\mu^{(i)} b_\mu^{(j)} \langle \mu, \nu \rangle m_\nu \int_{\mathbf{R}^4} \alpha_M F_2^{(i)} \wedge F_2^{(j)}$$

ゲージ理論側で計算した 't Hooft アノマリーに一致する。.

U(1)_RU(1)_BU(1)_B anomaly

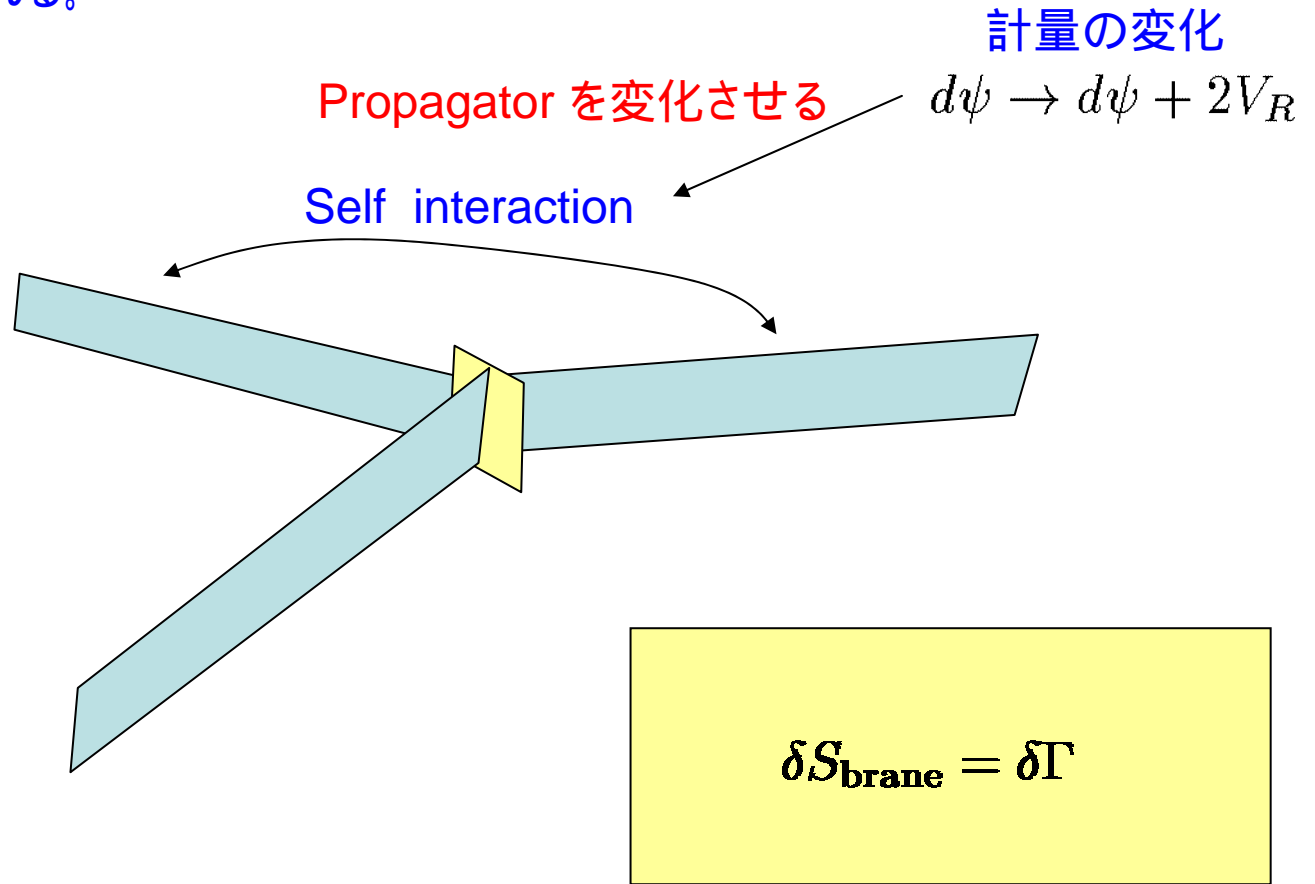
ゲージ理論側でアノマリー係数は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
 A_{Rij} &= \sum_I ((R_I - 1) B_I^i B_I^j) \\
 &= \sum_I \frac{1}{\pi} \text{sign}(\mu, \nu) [[\phi_\mu - \phi_\nu - \pi]] (b_\mu^i - b_\nu^i) (b_\mu^j - b_\nu^j) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu, \nu} \langle \mu, \nu \rangle [[\phi_\mu - \phi_\nu - \pi]] (b_\mu^i - b_\nu^i) (b_\mu^j - b_\nu^j)
 \end{aligned}$$

従って、アノマリーは

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i,j} A_{Rij} \int \lambda_R F_B^i \wedge F_B^j \quad \left(V_\mu^{(\text{NS5})} = \sum_i b_\mu^{(i)} V_B^{(i)} \right) \\
 &= \frac{1}{16\pi^3} \sum_{\mu, \nu} [[\phi_\mu - \phi_\nu - \pi]] \langle \mu, \nu \rangle \int \lambda_R (F_\mu^{(\text{NS5})} - F_\nu^{(\text{NS5})})^2
 \end{aligned}$$

詳細は省略するが、
このアノマリーは、計量の変化によるブレーンの「自己エネルギー」の変化として得られる。



4. Conclusions and Discussions

次の対応が明らかになった

$U(1)_B$	\longleftrightarrow	Gauge symmetries on branes
$U(1)_M$	\longleftrightarrow	B-field gauge tr.
$U(1)_R$	\longleftrightarrow	89-rotations

Brane を用いて $U(1)_M U(1)_B^2$ と $U(1)_R U(1)_B^2$ の二つのアノマリーを再現できた

未解決の問題

superconformal $U(1)_R$ はどうしたら得られる？

a-maximization は brane tiling で実現できる？

他の 't Hooft アノマリーは？ (おそらく高階微分項が必要)

特に $U(1)_R^3$ は a-maximization との関連で重要

その他の課題

Moduli parameters

Solitons and BPS operators

Breaking conformal sym. and cascading

SUSY breaking

Relation to Calabi-Yaus

...