

サイン・ゴールドン モデルの 可積分構造をめぐって

神保 道夫 (立教大学理学部)

joint with Tetsuji Miwa and Fedor Smirnov
arXiv:0912.0934 ;arXiv:1007.0556 (LMP online)

立教大学 場の理論・量子重力研究会
2011年1月5日

sine-Gordon モデル

sine-Gordon モデル

$$\mathcal{A}^{\text{sG}}[\varphi] = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\nabla\varphi)^2 - \frac{2\mu^2}{\sin \pi\beta^2} \cos \beta\varphi \right) d^2x,$$
$$\beta^2 = 1 - \nu, \quad \frac{1}{2} < \nu < 1.$$

多くのことが知られている:

sine-Gordon モデル

$$\mathcal{A}^{\text{sG}}[\varphi] = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\nabla\varphi)^2 - \frac{2\mu^2}{\sin \pi\beta^2} \cos \beta\varphi \right) d^2x,$$
$$\beta^2 = 1 - \nu, \quad \frac{1}{2} < \nu < 1.$$

多くのことが知られている:

- ▶ 無限個の保存量 l_1, l_3, l_5, \dots

sine-Gordon モデル

$$\mathcal{A}^{\text{sG}}[\varphi] = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\nabla\varphi)^2 - \frac{2\mu^2}{\sin \pi\beta^2} \cos \beta\varphi \right) d^2x,$$
$$\beta^2 = 1 - \nu, \quad \frac{1}{2} < \nu < 1.$$

多くのことが知られている:

- ▶ 無限個の保存量 l_1, l_3, l_5, \dots
- ▶ スペクトル mass $M = C\mu^{1/\nu}$

sine-Gordon モデル

$$\mathcal{A}^{\text{sG}}[\varphi] = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\nabla\varphi)^2 - \frac{2\mu^2}{\sin \pi\beta^2} \cos \beta\varphi \right) d^2x,$$
$$\beta^2 = 1 - \nu, \quad \frac{1}{2} < \nu < 1.$$

多くのことが知られている:

- ▶ 無限個の保存量 l_1, l_3, l_5, \dots
- ▶ スペクトル mass $M = C\mu^{1/\nu}$
- ▶ 散乱行列 (A.& Al. Zamolodchikov 1976)

sine-Gordon モデル

$$\mathcal{A}^{\text{sG}}[\varphi] = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\nabla\varphi)^2 - \frac{2\mu^2}{\sin \pi\beta^2} \cos \beta\varphi \right) d^2x,$$
$$\beta^2 = 1 - \nu, \quad \frac{1}{2} < \nu < 1.$$

多くのことが知られている:

- ▶ 無限個の保存量 l_1, l_3, l_5, \dots
- ▶ スペクトル mass $M = C\mu^{1/\nu}$
- ▶ 散乱行列 (A.& Al. Zamolodchikov 1976)
- ▶ Form factors (Smirnov 1986,1992)

sine-Gordon モデル

$$\mathcal{A}^{\text{sG}}[\varphi] = \int \left(\frac{1}{16\pi} (\nabla\varphi)^2 - \frac{2\mu^2}{\sin \pi\beta^2} \cos \beta\varphi \right) d^2x,$$
$$\beta^2 = 1 - \nu, \quad \frac{1}{2} < \nu < 1.$$

多くのことが知られている:

- ▶ 無限個の保存量 l_1, l_3, l_5, \dots
- ▶ スペクトル mass $M = C\mu^{1/\nu}$
- ▶ 散乱行列 (A.& Al. Zamolodchikov 1976)
- ▶ Form factors (Smirnov 1986,1992)

相関関数は $\nu = 1/2$ を除き challenge

2点関数の短距離挙動へ向けて

OPE + 摂動論

(Al.Zamolodchikov 1991)

$$\mathcal{A}_i(x)\mathcal{A}_j(0) = \sum_k C_{i,j}^k(x)\mathcal{A}_k(0) \quad (x \rightarrow 0),$$

$\mathcal{A}_i(x)$: local operators の空間の基底

2点関数の短距離挙動へ向けて

OPE + 摂動論

(Al.Zamolodchikov 1991)

$$\mathcal{A}_i(x)\mathcal{A}_j(0) = \sum_k C_{i,j}^k(x)\mathcal{A}_k(0) \quad (x \rightarrow 0),$$

$\mathcal{A}_i(x)$: local operators の空間の基底

- ▶ 構造関数 $C_{i,j}^k(x)$ は local data
CFT からの摂動論で原理的には計算可能 (Coulomb-gas 積分)

2点関数の短距離挙動へ向けて

OPE + 摂動論

(Al.Zamolodchikov 1991)

$$\mathcal{A}_i(x)\mathcal{A}_j(0) = \sum_k C_{i,j}^k(x)\mathcal{A}_k(0) \quad (x \rightarrow 0),$$

$\mathcal{A}_i(x)$: local operators の空間の基底

- ▶ 構造関数 $C_{i,j}^k(x)$ は **local data**
CFT からの摂動論で原理的には計算可能 (Coulomb-gas 積分)
- ▶ 真空期待値 (VEV) $\langle \mathcal{A}_i(0) \rangle$ は **global data**
非摂動的情報はすべて VEV に詰まっている

local operators の空間の記述

通常の記事: conformal limit でラベルする
primary 場

$$\Phi_\alpha(x) = e^{\frac{\nu\alpha}{2(1-\nu)}\{i\beta\varphi(x)\}}$$

と descendants

$$\{\mathcal{A}_i(0)\} = \{\ell_{-N_1} \cdots \ell_{-N_l} \bar{\ell}_{-\bar{N}_1} \cdots \bar{\ell}_{-\bar{N}_l} \Phi_\alpha(0)\},$$

$$\ell_n \bar{\ell}_m \mathcal{O}(0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint dz d\bar{z} z^{n+1} \bar{z}^{m+1} T(z) \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}(0).$$

保存量の local operator への作用

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{2n-1}\mathcal{O} &= [l_{2n-1}, \mathcal{O}] \\ \langle \mathbf{i}_{2n-1}\mathcal{O} \rangle &= 0 \quad (\forall \mathcal{O})\end{aligned}$$

保存量の local operator への作用

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{2n-1} \mathcal{O} &= [l_{2n-1}, \mathcal{O}] \\ \langle \mathbf{i}_{2n-1} \mathcal{O} \rangle &= 0 \quad (\forall \mathcal{O}) \end{aligned}$$

したがって本質的なのは商空間

(local operators の空間) mod (保存量の像)

この講演

この講演

保存量と **fermion** を用いた新しい基底の提示

この講演

保存量と **fermion** を用いた新しい基底の提示

⇒ 任意の descendant の VEV (予想)

この講演

保存量と **fermion** を用いた新しい基底の提示

⇒ 任意の descendant の VEV (予想)

「可積分構造」の理解の深化？

Plan

Plan

1. 格子モデルへの離散化

Plan

1. 格子モデルへの離散化
2. フェルミオンの導入と期待値（結果のみ）

Plan

1. 格子モデルへの離散化
2. フェルミオンの導入と期待値（結果のみ）
3. 連続極限

Plan

1. 格子モデルへの離散化
2. フェルミオンの導入と期待値（結果のみ）
3. 連続極限
4. VEV の予想

Plan

1. 格子モデルへの離散化
2. フェルミオンの導入と期待値（結果のみ）
3. 連続極限
4. VEV の予想
5. 結語

格子モデルによる正則化

格子モデルによる正則化

sine-Gordon モデルの離散化 : 6 vertex モデル

格子モデルによる正則化

sine-Gordon モデルの離散化 : 6 vertex モデル

$$\Phi_\alpha \text{ の格子類似 : } q^{2\alpha S(0)}, \quad S(0) = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^0 \sigma_j^3$$

descendants の格子類似 : $q^{2\alpha S(0)} \mathcal{O}$, \mathcal{O} : local

格子モデルによる正則化

sine-Gordon モデルの離散化 : 6 vertex モデル

$$\Phi_\alpha \text{ の格子類似 : } q^{2\alpha S(0)}, \quad S(0) = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^0 \sigma_j^3$$

descendants の格子類似 : $q^{2\alpha S(0)} \mathcal{O}$, \mathcal{O} : local

quasi-local operators の空間

$$\mathcal{W}^{(\alpha)} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_{\alpha-s, s},$$

$$\mathcal{W}_{\alpha-s, s} = \{q^{2(\alpha-s)S(0)} \mathcal{O} \mid \mathcal{O}: \text{local, spin } s\}$$

フェルミオンの導入

(Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov, Takeyama 2007–2009)

フェルミオンの導入

(Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov, Takeyama 2007–2009)

- ▶ 空間 $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ に働く **fermions** が構成できる

$$\mathbf{b}(\zeta), \mathbf{c}(\zeta), \mathbf{b}^*(\zeta), \mathbf{c}^*(\zeta)$$

$$\mathbf{b}^*(\zeta) \simeq \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{b}_p^{\pm*} (\zeta^2 / \zeta_0^{\pm 2} - 1)^{p-1} \quad (\zeta^2 \rightarrow \zeta_0^{\pm 2}), \dots$$

フェルミオンの導入

(Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov, Takeyama 2007–2009)

- ▶ 空間 $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ に働く **fermions** が構成できる

$$\mathbf{b}(\zeta), \mathbf{c}(\zeta), \mathbf{b}^*(\zeta), \mathbf{c}^*(\zeta)$$

$$\mathbf{b}^*(\zeta) \simeq \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{b}_p^{\pm*} (\zeta^2 / \zeta_0^{\pm 2} - 1)^{p-1} \quad (\zeta^2 \rightarrow \zeta_0^{\pm 2}), \dots$$

- ▶ これらは格子模型の保存量 $\mathbf{t}_1^*, \mathbf{t}_2^*, \dots$ と交換する

フェルミオンの導入

(Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov, Takeyama 2007–2009)

- ▶ 空間 $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ に働く **fermions** が構成できる

$$\mathbf{b}(\zeta), \mathbf{c}(\zeta), \mathbf{b}^*(\zeta), \mathbf{c}^*(\zeta)$$

$$\mathbf{b}^*(\zeta) \simeq \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{b}_p^{\pm*} (\zeta^2 / \zeta_0^{\pm 2} - 1)^{p-1} \quad (\zeta^2 \rightarrow \zeta_0^{\pm 2}), \dots$$

- ▶ これらは格子模型の保存量 $\mathbf{t}_1^*, \mathbf{t}_2^*, \dots$ と交換する
- ▶ 次は $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ の基底:

$$(\mathbf{t}_1^*)^p \mathbf{t}_{i_1}^* \cdots \mathbf{t}_{i_r}^* \mathbf{b}_{j_1}^{\epsilon_1^*} \cdots \mathbf{b}_{j_s}^{\epsilon_s^*} \mathbf{c}_{k_1}^{\bar{\epsilon}_1^*} \cdots \mathbf{c}_{k_t}^{\bar{\epsilon}_t^*} (q^{2\alpha S(0)})$$

$$(i_1 \geq \cdots \geq i_r \geq 2, j_1 > \cdots > j_s \geq 1,$$

$$k_1 > \cdots > k_t \geq 1, p \in \mathbb{Z}, r, s, t \geq 0, \epsilon_i, \bar{\epsilon}_i = \pm).$$

フェルミオンの導入

(Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov, Takeyama 2007–2009)

- ▶ 空間 $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ に働く **fermions** が構成できる

$$\mathbf{b}(\zeta), \mathbf{c}(\zeta), \mathbf{b}^*(\zeta), \mathbf{c}^*(\zeta)$$

$$\mathbf{b}^*(\zeta) \simeq \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{b}_p^{\pm*} (\zeta^2 / \zeta_0^{\pm 2} - 1)^{p-1} \quad (\zeta^2 \rightarrow \zeta_0^{\pm 2}), \dots$$

- ▶ これらは格子模型の保存量 $\mathbf{t}_1^*, \mathbf{t}_2^*, \dots$ と交換する
- ▶ 次は $\mathcal{W}^{(\alpha)}$ の基底:

$$(\mathbf{t}_1^*)^p \mathbf{t}_{i_1}^* \cdots \mathbf{t}_{i_r}^* \mathbf{b}_{j_1}^{\epsilon_1^*} \cdots \mathbf{b}_{j_s}^{\epsilon_s^*} \mathbf{c}_{k_1}^{\bar{\epsilon}_1^*} \cdots \mathbf{c}_{k_t}^{\bar{\epsilon}_t^*} (q^{2\alpha S(0)})$$

$$(i_1 \geq \cdots \geq i_r \geq 2, j_1 > \cdots > j_s \geq 1,$$

$$k_1 > \cdots > k_t \geq 1, p \in \mathbb{Z}, r, s, t \geq 0, \epsilon_i, \bar{\epsilon}_i = \pm).$$

注意: Jordan-Wigner fermion とは無関係

期待値の公式

(Jimbo, Miwa, Smirnov 2009)

期待値の公式

(Jimbo, Miwa, Smirnov 2009)

基底に属する任意の元の期待値

$$Z^{\kappa} \left\{ \mathbf{b}^{\epsilon_1^*}(\zeta_1) \cdots \mathbf{b}^{\epsilon_r^*}(\zeta_r) \mathbf{c}^{\bar{\epsilon}_r^*}(\xi_r) \cdots \mathbf{c}^{\bar{\epsilon}_1^*}(\xi_1) (q^{2\alpha S(0)}) \right\}$$

$$= \det \left(\omega_n(\zeta_j, \xi_k) + \delta_{\epsilon_j + \bar{\epsilon}_k, 0} \omega_0(\zeta_j / \xi_k) \right)_{1 \leq j, k \leq r}$$

期待値の公式

(Jimbo, Miwa, Smirnov 2009)

基底に属する任意の元の期待値

$$Z^\kappa \left\{ \mathbf{b}^{\epsilon_1^*}(\zeta_1) \cdots \mathbf{b}^{\epsilon_r^*}(\zeta_r) \mathbf{c}^{\bar{\epsilon}_r^*}(\xi_r) \cdots \mathbf{c}^{\bar{\epsilon}_1^*}(\xi_1) (q^{2\alpha S(0)}) \right\} \\ = \det \left(\omega_n(\zeta_j, \xi_k) + \delta_{\epsilon_j + \bar{\epsilon}_k, 0} \omega_0(\zeta_j / \xi_k) \right)_{1 \leq j, k \leq r}$$

$\omega_n(\zeta, \xi)$ は Matsubara 方向の Thermodynamic Bethe Ansatz のデータから線形積分方程式を解いて定まる。また

$$\omega_0(\zeta) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^{2ik} \frac{\sinh \pi \left((1 - \nu)k + \frac{i\alpha}{2} \right)}{2 \sinh \pi \left(k + \frac{i\alpha}{2} \right) \cosh \pi \nu k} dk.$$

スケール極限

$n \rightarrow \infty$, 格子間隔 $a \rightarrow 0$, $\zeta_0 \rightarrow \infty$,

$$na = 2\pi R \rightarrow \infty \quad 4a^{-1}\zeta_0^{-\frac{1}{\nu}} = M \quad \text{soliton mass (fixed)}$$

fermion を極限で直接作るのは困難.

スケール極限

$n \rightarrow \infty$, 格子間隔 $a \rightarrow 0$, $\zeta_0 \rightarrow \infty$,

$$na = 2\pi R \rightarrow \infty \quad 4a^{-1}\zeta_0^{-\frac{1}{\nu}} = M \quad \text{soliton mass (fixed)}$$

fermion を極限で直接作るのは困難.

しかし 期待値の極限はとれる! : $\omega_n(\zeta, \xi) \rightarrow 0$

スケール極限

$n \rightarrow \infty$, 格子間隔 $a \rightarrow 0$, $\zeta_0 \rightarrow \infty$,

$$na = 2\pi R \rightarrow \infty \quad 4a^{-1}\zeta_0^{-\frac{1}{\nu}} = M \quad \text{soliton mass (fixed)}$$

fermion を極限で直接作るのは困難.

しかし 期待値の極限はとれる! : $\omega_n(\zeta, \xi) \rightarrow 0$

漸近展開の係数がフェルミオンの“2点関数”:

$$\omega_0(\lambda, \alpha) \simeq_{\lambda \rightarrow \infty}$$

$$\frac{i}{\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-\frac{2j-1}{\nu}} \cot \frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{2j-1}{\nu} \right) - i \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{\alpha-2j} \tan \frac{\pi\nu}{2} (\alpha - 2j)$$

予想 1

次の weak limit が存在する :

予想 1

次の weak limit が存在する :

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{b}^{+*}(\zeta) \simeq \beta^*(\mu\zeta) + \bar{\beta}_{\text{screen}}^*(\zeta/\mu), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{c}^{+*}(\zeta) \simeq \gamma^*(\mu\zeta) + \bar{\gamma}_{\text{screen}}^*(\zeta/\mu), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{b}^{-*}(\zeta) \simeq \bar{\beta}^*(\zeta/\mu) + \beta_{\text{screen}}^*(\mu\zeta), \quad \zeta \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{c}^{-*}(\zeta) \simeq \bar{\gamma}^*(\zeta/\mu) + \gamma_{\text{screen}}^*(\mu\zeta), \quad \zeta \rightarrow 0.$$

予想 1

次の weak limit が存在する :

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{b}^{+*}(\zeta) \simeq \beta^*(\mu\zeta) + \bar{\beta}_{\text{screen}}^*(\zeta/\mu), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{c}^{+*}(\zeta) \simeq \gamma^*(\mu\zeta) + \bar{\gamma}_{\text{screen}}^*(\zeta/\mu), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{b}^{-*}(\zeta) \simeq \bar{\beta}^*(\zeta/\mu) + \beta_{\text{screen}}^*(\mu\zeta), \quad \zeta \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\text{scaling}} \frac{1}{2} \mathbf{c}^{-*}(\zeta) \simeq \bar{\gamma}^*(\zeta/\mu) + \gamma_{\text{screen}}^*(\mu\zeta), \quad \zeta \rightarrow 0.$$

$\beta^*(\zeta)$, etc. の係数は基底の構成に用いる

$\beta_{\text{screen}}^*(\zeta)$, etc. は “screening operator” の役割 (後述)

空間

$\{\Phi_\alpha(0) \text{ の descendants } \} \bmod \{ \text{保存量} \}$

の基底 :

$$\beta_{J^+}^* \bar{\beta}_{J^+}^* \bar{\gamma}_{J^-}^* \gamma_{J^-}^* \Phi_\alpha(0)$$

$$\beta_{J^+}^* = \beta_{j_1}^* \cdots \beta_{j_p}^* \quad (J^+ = \{j_1, \dots, j_p\}, j_1 < \dots < j_p), \text{ etc..}$$

ここで

$$\beta^*(\lambda) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-\frac{2j-1}{\nu}} \beta_{2j-1}^*, \quad \gamma^*(\lambda) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-\frac{2j-1}{\nu}} \gamma_{2j-1}^*,$$

$$\beta_{\text{screen}}^*(\lambda) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{\alpha+2j-2} \beta_{\text{screen},j}^*, \quad \gamma_{\text{screen}}^*(\lambda) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-\alpha+2j} \gamma_{\text{screen},j}^*, \text{ etc}$$

予想 2(VEV の公式)

予想 2(VEV の公式)

$$\frac{\langle \beta_{J^+}^* \bar{\beta}_{J^+}^* \bar{\gamma}_{J^-}^* \gamma_{J^-}^* \Phi_\alpha(0) \rangle}{\langle \Phi_\alpha(0) \rangle} = (-)^{\sharp(J^+)} \left(\frac{i}{\nu} \right)^{\sharp(J^+) + \sharp(J^-)} \mu^{\frac{2}{\nu}(|J^+| + |J^-|)}$$

$$\times \prod_{j \in J^+} \cot \frac{\pi}{2} \left(\frac{j}{\nu} + \alpha \right) \prod_{j \in J^-} \cot \frac{\pi}{2} \left(\frac{j}{\nu} - \alpha \right)$$

ただし

$$|J^+| = |\bar{J}^-|, \quad |J^-| = |\bar{J}^+|, \quad \sharp(J) := \sum_{j \in J} j$$

予想 3(α のシフトの公式)

予想 3(α のシフトの公式)

$$\Phi_{\alpha+2\frac{1-\nu}{\nu}}(0) \simeq i\mu^2 \cot \frac{\pi\nu}{2}(\alpha) C_1(\alpha) \beta_1^* \bar{\gamma}_1^* \bar{\beta}_{\text{screen},1}^* \gamma_{\text{screen},1}^* \Phi_\alpha(0)$$

ただし

$$C_1(\alpha) = \nu \Gamma(\nu)^{4x} \frac{\Gamma(-2\nu x)}{\Gamma(2\nu x)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)} \frac{\Gamma(-x+1/2)}{\Gamma(-x)} i^{\cot \pi x},$$

$$x = \frac{\alpha}{2} + \frac{1-\nu}{2\nu}.$$

Virasoro descendants との関係

Conformal limit $M \rightarrow 0$ における $\omega(\lambda, \mu)$ の漸近解析 から fermion 基底と Virasoro 基底の関係がつく

$$\beta_{2n-1}^* := D_{2n-1}(\alpha) \beta_{2n-1}^{\text{CFT}^*}, \quad \gamma_{2n-1}^* = D_{2n-1}(2-\alpha) \gamma_{2n-1}^{\text{CFT}^*},$$

$$D_{2n-1}(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{i\nu}} G^{2n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\nu}(2n-1)\right)}{(n-1)! \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(1-\nu)}{2\nu}(2n-1)\right)}$$

$$G = \Gamma(\nu)^{-1/\nu} \sqrt{1-\nu}$$

Virasoro 基底との関係

保存量を法として

$$\beta_1^{CFT*} \gamma_1^{CFT*} \Phi_\alpha \equiv \ell_{-2} \Phi_\alpha,$$

$$\beta_{\frac{1}{3}}^{CFT*} \gamma_{\frac{1}{3}}^{CFT*} \Phi_\alpha \equiv \left(\ell_{-2}^2 + \left(\frac{2c-32}{9} \pm \frac{2}{3} \right) \ell_{-4} \right) \Phi_\alpha,$$

...

ここで $c = 1 - 6\nu^2/(1 - \nu)$ は central charge.
degree 8 までのデータがある

予想のチェック

既知の結果との整合性

予想のチェック

既知の結果との整合性

Lukyanov-Zamolodchikov 1997

$$\langle \Phi_\alpha(0) \rangle = [\Gamma(\nu)\mu]^{\frac{\nu\alpha}{2(1-\nu)}} \\ \times \exp\left(\int_0^\infty \left(\frac{\sinh^2(\nu\alpha t)}{2 \sinh(1-\nu)t \sinh t \cosh \nu t} - \frac{\nu^2 \alpha^2}{2(1-\nu)} e^{-2t}\right) \frac{dt}{t}\right).$$

⇐ 予想 $3+\alpha$ についての解析性

予想のチェック

既知の結果との整合性

Lukyanov-Zamolodchikov 1997

$$\langle \Phi_\alpha(0) \rangle = [\Gamma(\nu)\mu]^{\frac{\nu\alpha}{2(1-\nu)}} \times \exp\left(\int_0^\infty \left(\frac{\sinh^2(\nu\alpha t)}{2 \sinh(1-\nu)t \sinh t \cosh \nu t} - \frac{\nu^2 \alpha^2}{2(1-\nu)} e^{-2t}\right) \frac{dt}{t}\right).$$

⇐ 予想 3+ α についての解析性

Fateev et al. 1998

$$\frac{\langle \ell_{-2} \bar{\ell}_{-2} \Phi_\alpha(0) \rangle}{\langle \Phi_\alpha(0) \rangle} = - \frac{(\Gamma(\nu)\mu)^{4/\nu}}{(1-\nu)^2} \frac{\gamma(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\nu}) \gamma(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\nu})}{\gamma(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\nu}) \gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\nu})}$$

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}.$$

⇐ 予想 2

$R < \infty$ の場合, VEV の公式は知られていなかった
Zamolodchikov, 2005 : 任意の 2d QFT において

$$\langle T_{z,z} \bar{T}_{\bar{z},\bar{z}} \rangle = \langle T_{z,z} \rangle \langle \bar{T}_{\bar{z},\bar{z}} \rangle - \langle T_{z,\bar{z}} \bar{T}_{z,\bar{z}} \rangle^2$$

← 予想 2 と整合する

Concluding remarks

Concluding remarks

Almost by definition,

Integrability $\simeq \exists$ Infinite number of commuting integrals

Concluding remarks

Almost by definition,

Integrability $\simeq \exists$ Infinite number of commuting integrals

However, in good cases

\exists Large symmetry \supset Abelian symmetry

Concluding remarks

Almost by definition,

Integrability $\simeq \exists$ Infinite number of commuting integrals

However, in good cases

\exists Large symmetry \supset Abelian symmetry

Most successful example: classical integrable hierarchies

Space of solutions (KP) = $\text{Gr} \left(\frac{\infty}{2}, \infty \right) \curvearrowright \mathfrak{gl}(\infty)$

Space of solutions (KdV) $\curvearrowright \widehat{\mathfrak{sl}}_2$

M. and Y. Sato 1981

Date, Kashiwara, Miwa, J. 1981

What about the quantum case?

Large non-abelian symmetries have appeared in the context of correlation functions:

What about the quantum case?

Large non-abelian symmetries have appeared in the context of correlation functions:

What about the quantum case?

Large non-abelian symmetries have appeared in the context of correlation functions:

- ▶ free fermions (Ising model)

What about the quantum case?

Large non-abelian symmetries have appeared in the context of correlation functions:

- ▶ free fermions (Ising model)
- ▶ Virasoro algebra (CFT)

What about the quantum case?

Large non-abelian symmetries have appeared in the context of correlation functions:

- ▶ free fermions (Ising model)
- ▶ Virasoro algebra (CFT)
- ▶ Quantum affine algebra (XXZ model)

All these act on the [space of states](#).

What about the quantum case?

Large non-abelian symmetries have appeared in the context of correlation functions:

- ▶ free fermions (Ising model)
- ▶ Virasoro algebra (CFT)
- ▶ Quantum affine algebra (XXZ model)

All these act on the [space of states](#).

We contend that, in the sine-Gordon model at generic coupling,

What about the quantum case?

Large non-abelian symmetries have appeared in the context of correlation functions:

- ▶ free fermions (Ising model)
- ▶ Virasoro algebra (CFT)
- ▶ Quantum affine algebra (XXZ model)

All these act on the [space of states](#).

We contend that, in the sine-Gordon model at generic coupling,

fermions complement the integrable structure
of the [space of local operators](#).

ご清聴ありがとうございました