

トンネル効果による α 粒子の説明

量子力学によると、幅 d 、高さ V のポテンシャル障壁を質量 m 、エネルギー E の粒子が透過する確率 P は

$$P = \left(1 + \frac{V^2 \sinh^2 kd}{4E(V-E)}\right)^{-1}$$

と書ける。ここで、 $k = \sqrt{2m(V-E)}/\hbar$ である。

$kd \gg 1$ であると、 $P \simeq \frac{16E(V-E)}{V^2} e^{-2kd}$ となり、指数関数の部分で透過率が決まる。

ポテンシャルが r の関数 $V(r)$ であるような場合にはこれを一般化して

$$P \propto \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^b \sqrt{2m(V(r)-E)} dr\right]$$

と書ける。ここで、 b は $V(b) = E$ となる r である。

$V(r) = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ であり、 $r < R$ では核力のために井戸型の引力ポテンシャルとなっているような場合は、この積分は

$$\frac{2b\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_R^b \sqrt{b/r - 1} dr$$

となり

$$\frac{4C}{\hbar v} \left(\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} \left(1 - \frac{R}{b}\right)} \right)$$

となる。 $(C \equiv \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0})$ である)、 $R/b \ll 1$ であると、これは

$$\frac{4C}{\hbar v} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{b}} \right)$$

と近似でき、

$$P \propto \exp(-const \cdot Z/\sqrt{E})$$

となることがわかる。